

1 Théorème de Thalès (reformulation)

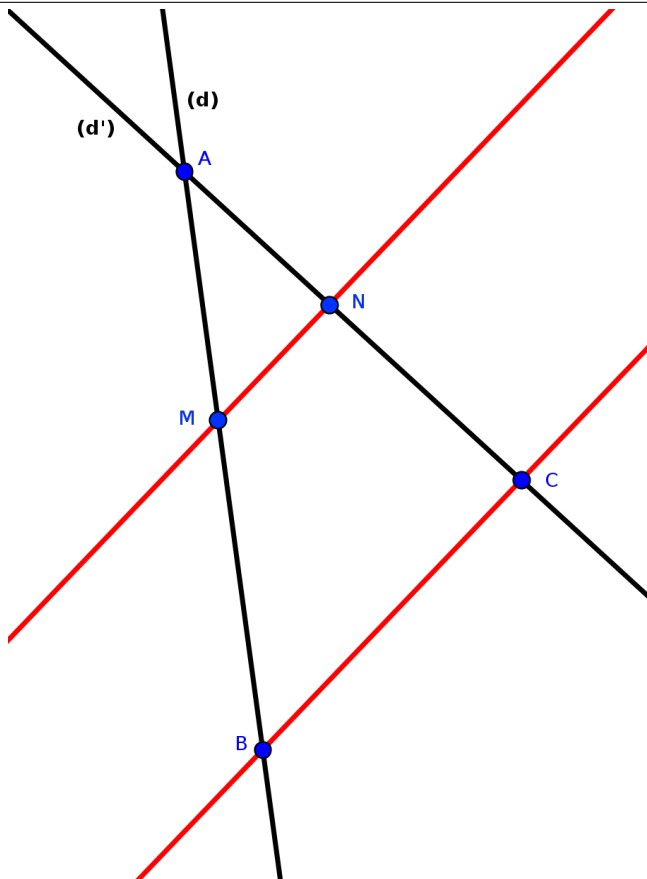
Propriété (Thalès).

Avec la configuration suivante :

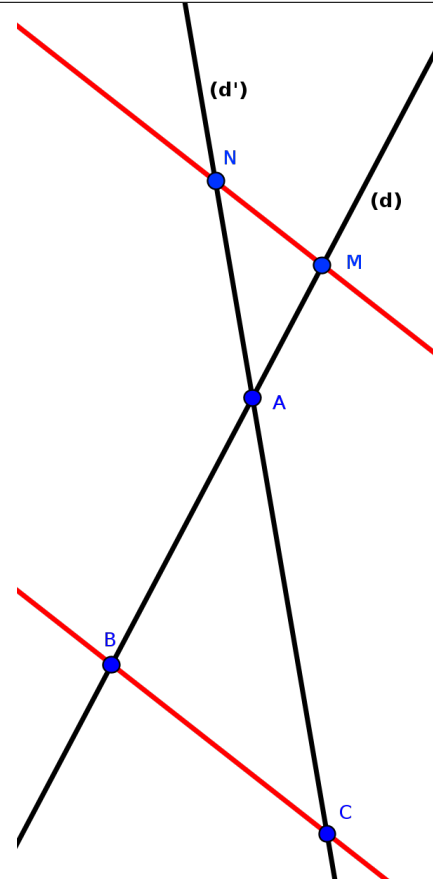
- (d) et (d') sont deux droites sécantes en un point A ,
- B et M sont deux points de (d) distincts de A ,
- C et N sont deux points de (d') distincts de A .

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors on a l'égalité des quotients $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Première configuration possible avec $(MN) \parallel (BC)$



Seconde configuration possible avec $(MN) \parallel (BC)$



Remarque : cette égalité signifie que les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont proportionnelles !
Autrement dit : les triangles ABC et AMN ont la même forme mais sont à des échelles différentes. Dans la seconde configuration on a en plus de la réduction un demi-tour autour du sommet A (symétrie centrale) de l'un des triangles.

Exemple d'application :

Dans la figure précédente, si $MN = 1,25$, $BC = 5$ et $AN = 4$ quelle est alors la longueur de $[NC]$?

Rédaction de la réponse :

On sait que les points A, N, C et A, M, B sont alignés et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Or, d'après le théorème de Thalès on a l'égalité :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}, \text{ soit en remplaçant par les valeurs connues :}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{AC} = \frac{1,25}{5}, \text{ on sélectionne les fractions utiles :}$$

$$\frac{4}{AC} = \frac{1,25}{5} \text{ puis avec un produit en croix :}$$

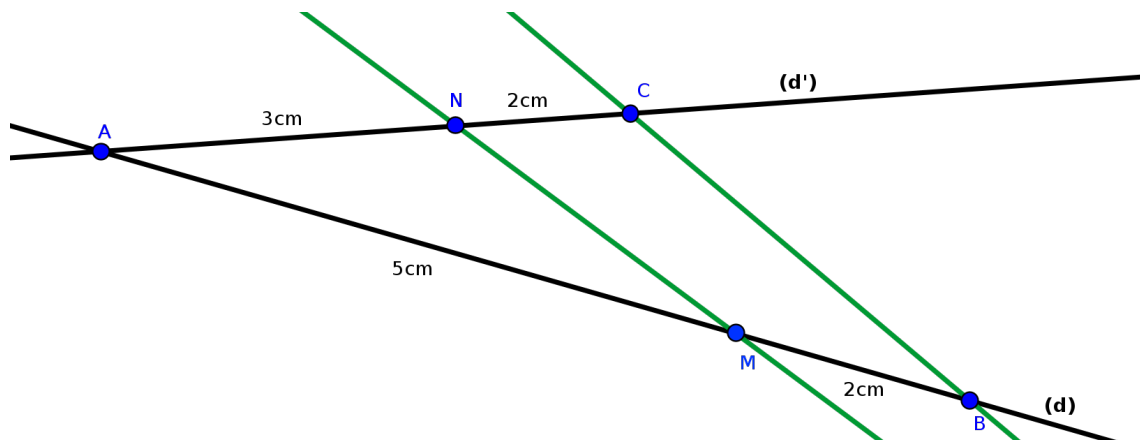
$$1,25 \times AC = 20 \text{ et donc : } AC = \frac{20}{1,25} = 16$$

Donc comme $NC = NA + AC$ on a : $NC = 4 + 16 = 20$.

★ Conséquence (contraposée)

Une conséquence très importante du théorème de Thalès est que si l'une des égalités : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ est fausse alors les droites (MN) et (BC) ne peuvent pas être parallèles. On parle alors de contraposée du théorème de Thalès.

Exemple :



Dans la figure ci-dessus, les points A, M, B et A, N, C sont alignés **mais** :

$$0,71 \simeq \frac{5}{7} = \frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC} = \frac{3}{5} = 0,6$$

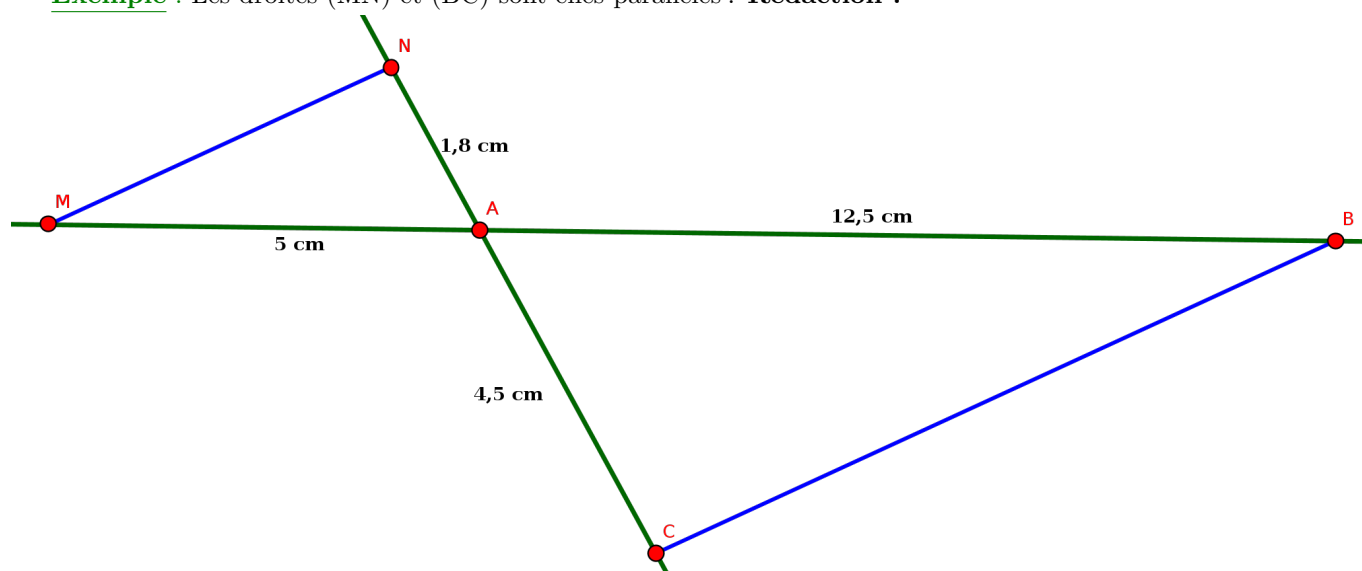
Donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles !

2 Réciproque du théorème de Thalès

Propriété

Si les points A, M, B et les points A, N, C sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple : Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? **Rédaction :**



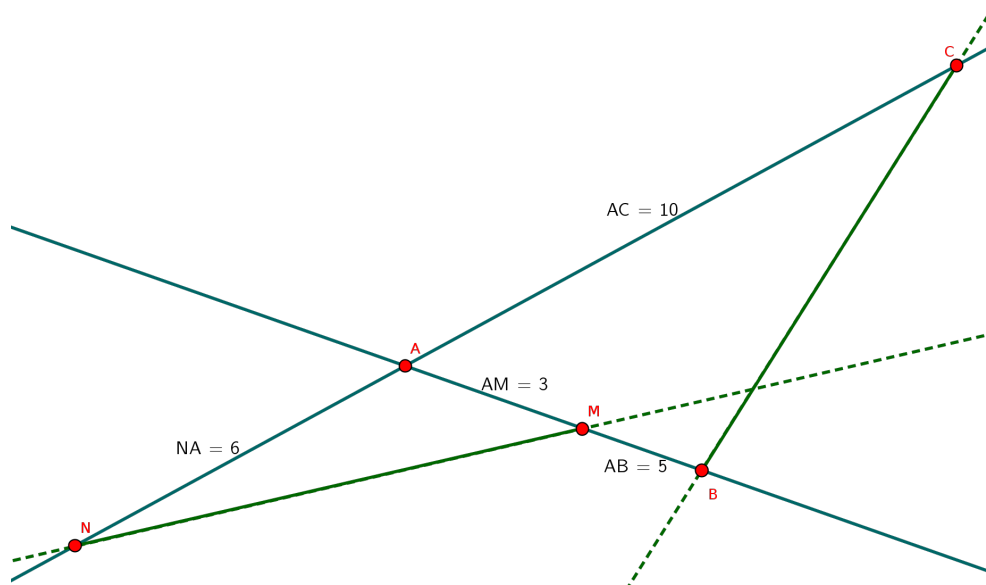
On sait que les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre. De plus, on a d'une part $\frac{AM}{AB} = \frac{5}{12,5} = 0,4$ et d'autre part $\frac{AN}{AC} = \frac{1,8}{4,5} = 0,4$.

Or dans ces conditions, la réciproque du théorème de Thalès nous dit que si on a égalité des quotients alors les droites sont parallèles.

Donc $(BC) \parallel (MN)$.

Remarque : Pourquoi y a-t-il dans la réciproque du théorème de Thalès les termes “**dans le même ordre**” ? Et bien supposons que les points ne soient pas alignés dans le même ordre et que, par exemple, A n'est pas entre M et B . Dans ce cas on peut tout à fait avoir l'égalité des quotients requis par le théorème de Thalès mais sans avoir de droites parallèles comme le montre la figure suivante :

Contre-exemple :

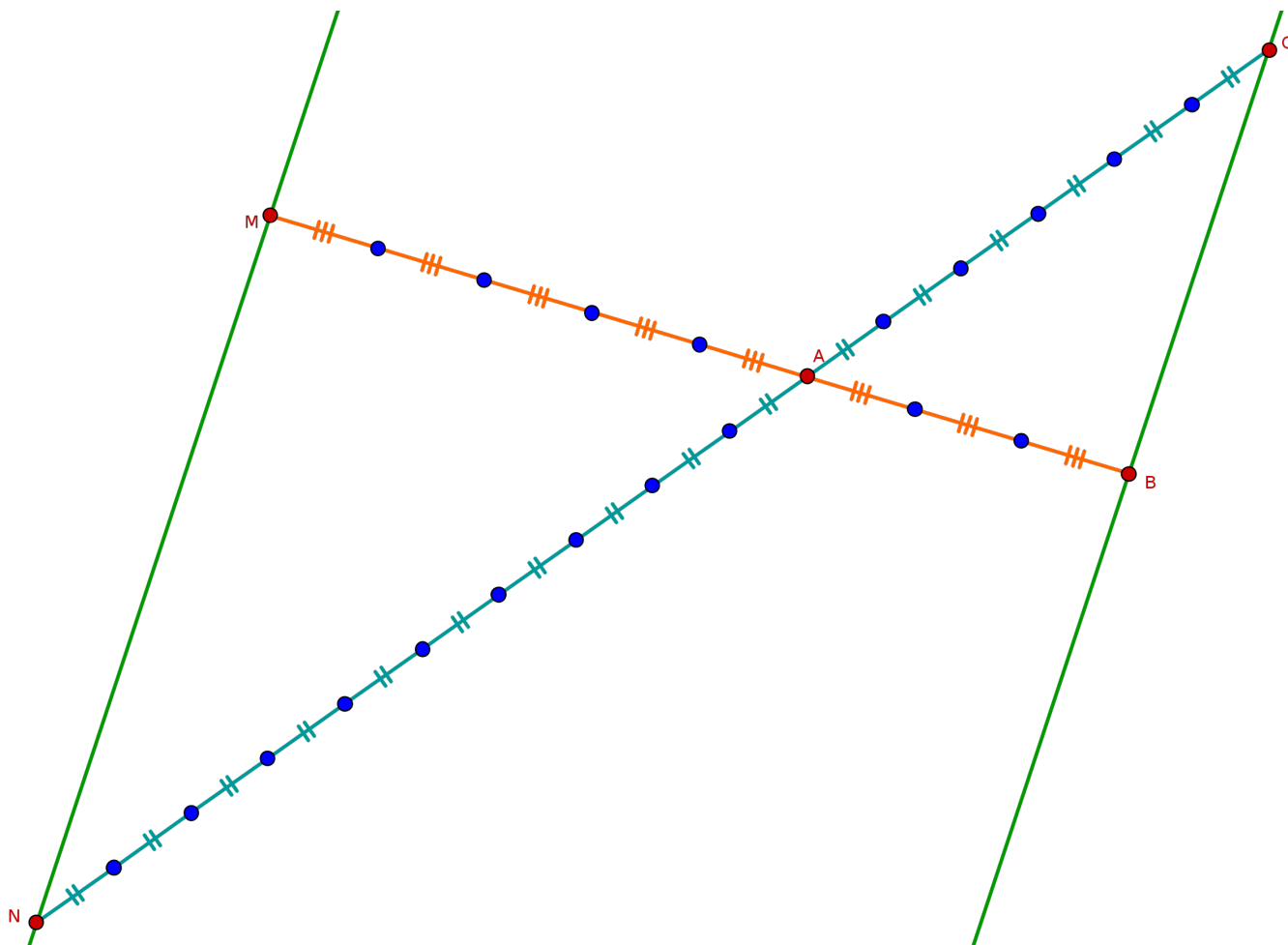


Dans cette dernière figure les points A, M, B et A, N, C ne sont pas alignés dans le même ordre pourtant :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

mais les droites (MN) et (BC) ne sont clairement pas parallèles.

Autre exemple (unités non définies) :



Ici les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre et $\frac{AM}{AB} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{5}{3}$
 Or, dans ces conditions et d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites sont parallèles.
 Donc (MN) et (BC) sont parallèles.

3 Agrandissement - Réduction

Rappel : Lorsque l'on copie une figure dans une taille différente on peut parler d'agrandissement (si la nouvelle figure est plus grande) ou de réduction (si la nouvelle figure est plus petite).

Le rapport d'agrandissement ou de réduction (qu'on appelle aussi l'**échelle**) se calcule en effectuant le quotient d'une longueur de la nouvelle figure par la longueur correspondante de l'ancienne.

Exemple : J'ai un carré de côté 5cm dont je réalise une copie : un nouveau carré de côté 8cm. J'ai donc réalisé un agrandissement de rapport $\frac{8}{5} = 1,6$.

Remarque : Dans le cas d'un agrandissement le rapport sera donc toujours un nombre plus grand que 1 et dans le cas d'une réduction le rapport sera toujours plus petit que 1.

Propriété

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport $r > 0$. ($r > 1$: agrandissement ; $r < 1$: réduction)

- Les mesures d'angles et le parallélisme sont conservés.
- Les longueurs sont multipliées par r .
- Les aires sont multipliées par r^2
- Les volumes sont multipliés par r^3

Exemple : Si l'on passe de la figure 1 à la figure 2 par une réduction de rapport $0,8 < 1$

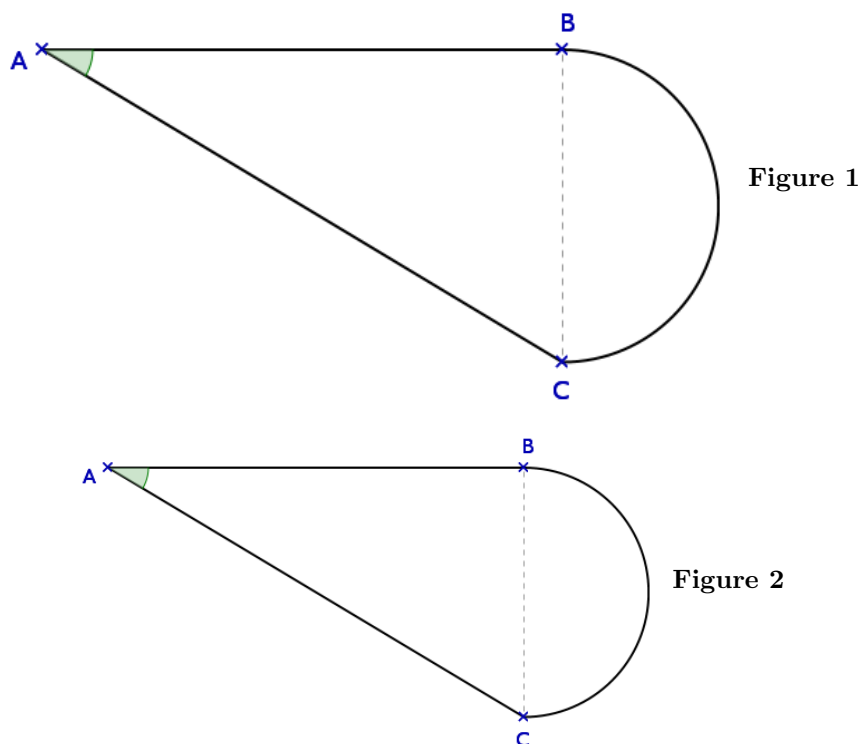


	Figure 1	→	Figure 2
Angle $\widehat{BAC}$	36°	conservé	36°
Longueur AB	4cm	$4 \times 0,8 = 3,2$	3,2cm
Aire de la figure	$21,36 \text{ cm}^2$	$21,36 \times 0,8^2 = 13.6704$	13.6704 cm^2