Professeur : Rachid BELEMOU	Cours	Niveau : TCT-TCS : BIOF
Lycée : Prince Moulay Abdellah	La droite dans le plan	Année : 2021-2022

I) Repère et coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur

1)Activité :

Soient O. I et J trois points non alignés dans le plan P.
Et soit M un point quelconque du plan

1)Construire le point M_1 la projection de M sur (OI) parallèlement a (OJ) et le point M_2 la projection de M sur (OJ) parallèlement a (OI)

2)soit x l'abscisse de M_1 sur l'axe gradué (OI) et y l'abscisse de M_2 sur l'axe (OJ)

a) Ecrire $\overrightarrow{OM_1}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et écrire $\overrightarrow{OM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$

b) En déduire $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$

2) Le Repère dans le plan :

Soient O. I et J trois points non alignés dans le plan P.
Le triplet (O ; I ; J) détermine un Repère dans le plan. On le note R (O ; I ; J) ou R

Le point O est l'origine du Repère (O ; I ; J)
La droite (O I) est l'axe des abscisses du Repère (O ; I ; J)
La droite (O J) est l'axe des ordonnées du Repère (O ; I ; J)

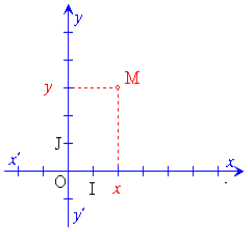
* Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires ont dit que le Repère est orthogonal

* Si on a OI =OJ = 1 ont dit que le Repère (O ; I ; J) est normé

* Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires

* Si on a OI =OJ = 1 ont dit que le Repère (O ; I ; J) estorthonormé

On pose $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ on note alors le Repère (O ; I ; J) par $(O;i;j)$



3) Les coordonnées d'un point :

Propriété et définition : Le plan est rapporté au Repère (O ; I ; J).Pour tout point M du plan il existe un unique couple (x,y) tel que $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$

Le couple (x,y) est le couple de coordonnée de M et on note : $M(x,y)$: x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;i;j)$ Construire les points $A(-4;2)$; $B(-2;3)$; $C(-3;3)$; $E(0;4)$; $F(-3;0)$ et les vecteurs $\vec{u}(3;2)$; $\vec{v}(-2;-4)$

4) Les coordonnées d'un vecteur :

Définition : Le plan est rapporté au Repère $(O;i;j)$

Le couple de coordonnée d'un vecteur $\vec{u}$ est le couple de coordonnée du point M tel que $OM=u$ et on note :

$\vec{u}(x,y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Propriétés : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;i;j)$

Soient $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $I(x_I;y_I)$ trois points dans le plan et $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$ et

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$\vec{u}(x;y)=\vec{v}(x';y')$ ssi $x'=x$ et $y=y'$

$\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$ et $\vec{u}-\vec{v}(x-x';y-y')$

$\vec{u}+\vec{v}=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}$

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad\alpha\bullet\vec{u}(\alpha x;\alpha y)$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soient $A(1;2)$; $B(-5;4)$

1. Déterminer les coordonnée de I le milieu du segment [AB] et calculer $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
2. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$
3. Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$

II) Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

Dans la suite de ce cours le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;i;j)$

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=\alpha\bullet\vec{v}$

On a $\vec{u}(x;y)$ et $\alpha\bullet\vec{v}(\alpha x';\alpha y')$

On a $\vec{u}=\alpha\bullet\vec{v}$ donc $x=\alpha x'$ et $y=\alpha y'$

Si $x'\neq 0$ et $y'\neq 0$ alors $\alpha=\frac{x}{x'}$ et $\alpha=\frac{y}{y'}$

donc $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}$ alors $xy'=x'y$ finalement on a :

$xy'-x'y=0$

Si $x'=0$ alors $x=0$ la condition est juste

Si $y'=0$ alors $y=0$ la condition est juste

1) Le déterminant de deux vecteurs :

Définition : Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs

On appelle le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ le réel : $xy'-x'y$

Et on le note : $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$

Exemple : $\vec{u}(-2;3)$ et $\vec{v}(4;5)$

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=(-2)\times 5-3\times 4=-10-12=-22$

Propriété : Deux vecteurs $u(x;y)$ et $v(x';y')$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u};\vec{v})=0$

Deux vecteurs $u(x;y)$ et $v(x';y')$ sont non colinéaires ssi $\det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$

Remarque : Trois points A. B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Ssi $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$

Exemple :1) $u(1;2)$ et $v(-3;1)$

2) $\vec{u}(-6;4)$ et $\vec{v}(3;-2)$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;i;j)$

Soit m un paramètre réel

Discuter suivant les valeurs de m la colinéarité de u et v dans chaque cas :

1) $u(\vec{3};2m+1)$ et $\vec{v}(2;m)$

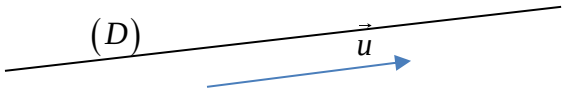
2) $u(\vec{m};1)$ et $\vec{v}(1;m)$

III)La droite dans le plan

1) Définition vectorielle d'une droite :

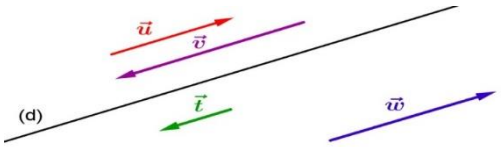
a. Vecteur directeur d'une droite :

Un vecteur directeur d'une droite (D) est un vecteur non nul u qui possède la même direction que la droite (D)

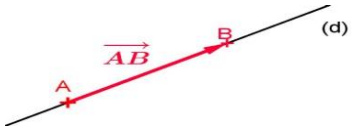


Remarques :

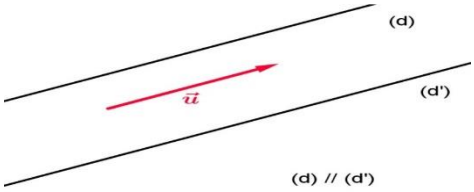
- Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.
- si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) alors tout vecteur non nul et colinéaire au vecteur $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de cette droite.



- Deux points distincts quelconques de la droite (D) définissent un vecteur directeur de cette droite



- . Deux droites (D), et (D') sont parallèles si tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.



b. Propriété : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point du plan .L'ensemble des points M du plan tq il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq : $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ est la droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A qu'on note : $D\left(A;\vec{u}\right)$

$D\left(A;\vec{u}\right) = \left\{M \in P / \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}\right\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

C'est la Définition vectorielle d'une droite

2) Représentation paramétrique d'une droite :

Soit $\vec{u}(a;b)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan

On a $M \in D\left(A;\vec{u}\right)$ ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq : $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$

On a $\overrightarrow{AM}\left(x-x_A;y-y_A\right)$ et $\alpha\vec{u}(\alpha a;\alpha b)$ donc

$\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ ssi $\begin{cases} x-x_A = \alpha a \\ y-y_A = \alpha b \end{cases}$ ssi

$\begin{cases} x = \alpha a + x_A \\ y = \alpha b + y_A \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Définition : Soit $u(a;b)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan et $t \in \mathbb{R}$

le système : $\begin{cases} x = ta + x_A \\ y = tb + y_A \end{cases}$ avec $t \in$ s'appelle une représentation paramétrique de la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$

Exemples :

Exemple 1 : Donner un point et un vecteur directeur de la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 7t-1 \\ y = -4t+11 \end{cases}$ avec $t \in$ IR

Exemple 2 :

Soient A(1 ; 2) et B(-3 ; 0)

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Déterminer si chacun des points suivants appartient ou non a la droite (AB) :

$C(0;2)$; $D(-1;1)$; $E(9;6)$

3) Equations cartésiennes d'une droite

Soit $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan et soit $(D)=D(A;\vec{u})$

On a $M(x;y)\in(D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

ssi $\det(AM;u)=0$ On a $AM(x-x_A;y-y_A)$ et on a

$$\begin{vmatrix} x-x_A & \alpha \\ y-y_A & \beta \end{vmatrix} = \beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=\beta x-\beta x_A-\alpha y+\alpha y_A$$

$$=\beta x-\alpha y-\beta x_A+\alpha y_A$$

on pose : $\beta=a$ et $-\alpha=b$ et $-\beta x_A+\alpha y_A=c$

alors : $M(x;y)\in(D)$ ssi $ax+by+c=0$

Définition : Toute droite (D) admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ et $a\neq0$ ou $b\neq0$

Remarque : Une droite (D) admet une infinité d'équations cartésiennes
En effet, si **ax + by + c = 0** est une équation cartésienne de (D), alors pour tout réel ***k*** non nul alors kax + kby + kc = ***0*** est une autre équation de la même droite.

Propriété : Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ tel que $a\neq0$ ou $b\neq0$
L'ensemble des points M (x ; y) vérifiant l'équation :
ax + by + c = 0 est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$

4) Equation réduite d'une droite

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ donc $by=-ax-c$

Si $b\neq0$ alors $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

On pose : $m=-\frac{a}{b}$ et $p=-\frac{c}{b}$ alors $y=mx+p$

Si $b=0$ alors on a $ax+c=0$ donc $x=-\frac{c}{a}$ $(a\neq0)$

dans ce cas (D) est parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété : une droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ssi son équation cartésienne s'écrit sous la forme :
y = mx + p ***avec*** $m\in\mathbb{R}$ ***et*** $p\in\mathbb{R}$

Définition : Soit (D) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
L'équation : **y = mx + p** *s'appelle* L'équation réduite de (D)
- Le nombre *m s'appelle* le coefficient directeur de la droite
- Le nombre *p s'appelle* l'ordonnée a l'origine

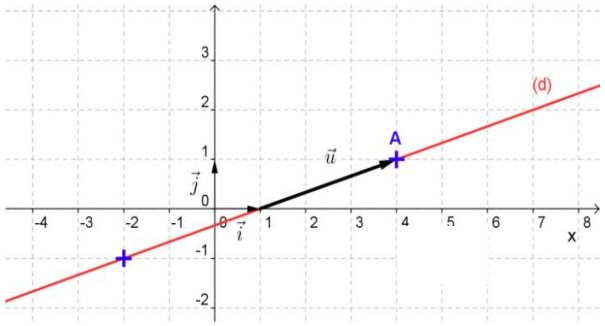
Remarque :
- si *m est* le coefficient directeur de la droite alors un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(1;m)$
- si $u(-b;a)$ *est* un vecteur directeur de la droite (D) et $b\neq0$ alors $m=-\frac{a}{b}$ est un coefficient directeur de la droit

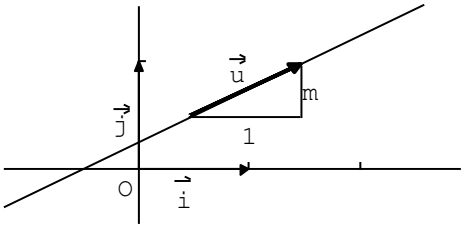
Exemples :

Exemple 1 : Déterminer une équation cartésienne de la droite D) passant par le point A(1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;3)$

Exemple 2 : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), passant par les points A (5 ; 13) et B (10 ; 23).

Exemple 3 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de sa représentation graphique
Soit $(O;i;j)$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), tracée ci-dessous





Exemple : Soit (D) la droite d'équation cartésienne : *4x + 2 y + 3 = 0*
- Son équation réduite est de la forme : y = -2x-3
- *-2 est* le coefficient directeur de la droite (D)
- Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(-2;4)$ ou $\vec{u}(1;-2)$

Remarque : si $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$ et $x_A \neq x_B$ alors

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est coefficient directeur de la droite (AB)

Iv)positions relatives de deux droites dans le plan

Propriété :

Deux droites (D) et (D'), d'équations respectives :
$ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$
Sont parallèles si et seulement si : $a\,b' - a'b = 0$

Démonstration :

Remarque: 1) si (D) et (D') sont parallèles : on prend un point $A \in (D)$

- Si $A \in (D')$ alors $(D) = (D')$ (confondues)
- Si $A \notin (D')$ alors $(D) \parallel (D')$ strictement

2) si (D) et (D') sont sécantes alors le point d'intersection E (x ; y) vérifie le système : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

Conséquence : Soit la droite (D) d'équation : $y = mx + p$ et (D') : $y' = m'x + p'$
(D) et (D') sont parallèles si et seulement si $m = m'$
En effet les vecteurs de coordonnées (1 ; m) et (1 ; m) sont deux vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D')
D'où : ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si $m = m'$

Exemple : Représenter graphiquemt les droites suivantes :

1) (D_1) $2x + y - 3 = 0$ 2) (D_2) : $x = 3$

3) (D_2) : $y = 2$

Application : Étudier la position relative des deux droites D) et (D') dans chaque cas suivant :

1) (D) $2x - 4y + 3 = 0$ (D') : $-x + 2y + 5 = 0$

2) (D) $2x + 5y - 2 = 0$ (D') : $x + 3y - 2 = 0$

Professeur : Rachid BELEMOU	Exercices	Niveau : TCT-TCS : BIOF
Lycée : Prince Moulay Abdellah	La droite dans le plan	Année : 2021-2022

Exercice1 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ Construire les points $A(-4;2)$; $B(-2;3)$; $C(-3;3)$; $E(0;4)$; $F(-3;0)$ et les vecteurs $\vec{u}(3;2)$ $\vec{v}(-2;-4)$

Exercice2 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soient $A(1;2)$; $B(-5;4)$

1. Déterminer les coordonnée de I le milieu du segment [AB] et calculer $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$
2. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$
3. Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$

Exercice3 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A(1;2)$; $B(-3;-1)$ et $C(3;-2)$ et les vecteurs $\vec{u}(-2;3)$ et $\vec{v}(2;4)$

1) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

2) Déterminer les coordonnée de I le milieu du segment [AB]

3)calculer les distances suivantes : AB et AC et BC

Exercice4 : on considére dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ les vecteurs $\vec{u}(3,-2)$ et $\vec{v}(-6,4)$

Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

Exercice5 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A\left(\frac{1}{2};3\right)$; $B(-2;-2)$ et $C(1;4)$ et le vecteur $\vec{u}(1;3)$

1)déterminer le réel x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}(x-2,5)$ soient colinéaires

2)montrer que les points A ; B et C sont alignés

Exercice6 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soit m un paramètre réel

Discuter suivant les valeurs de m la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chaque cas :

1) $\vec{u}(3;2m+1)$ et $\vec{v}(2;m)$

2) $\vec{u}(m;1)$ et $\vec{v}(1;m)$

Exercice7 : donner une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$ qui passe par $A(3;-5)$ et $\vec{u}(-2;3)$ un vecteur directeur

Exercice8 : Soient A(1 ; 2) et B(-3 ; 0)

1)Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2)Déterminer si chacun des points suivants appartient ou non à la droite (AB) : $C(0;2)$; $D(-1;1)$; $E(9;6)$

Exercice9 : Donner un point et un vecteur directeur de la la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 7t-1 \\ y = -4t+11 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Exercice10 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A(-2,1)$; $B(3,7)$

1)Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) déterminer les points d'intersections de la droite (AB). Avec les axes du repère

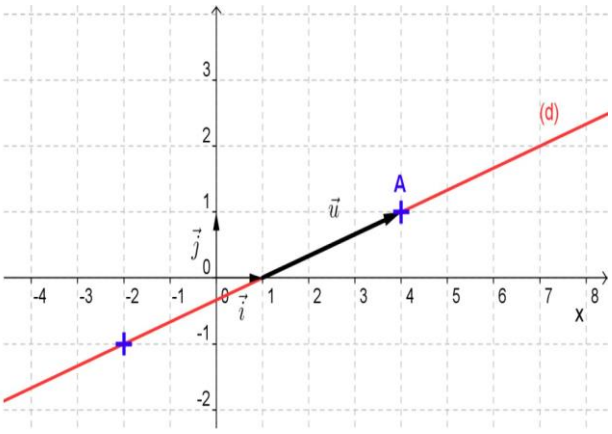
Exercice11 : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par les point A(2 ; 4) et B(5 ; -1)

Exercice12 : Déterminer une équation cartésienne de la droite D) passant par le point A(1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;3)$

Exercice13 : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), passant par les points A (5 ; 13) et B (10; 23).

Exercice14 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de sa représentation graphique

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), , tracée ci-dessous



Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Prince Moulay Abdellah	Exercices La droite dans le plan	Niveau : TCT-TCS : BIOF Année : 2021-2022

Exercice15 : Soit (D) la droite d'équation cartésienne : $4x + 2y + 3 = 0$
Déterminer l'équation réduite de la droite(D) et son coefficient directeur et un vecteur directeur

Exercice16 : Représenter graphiquemt les droites suivantes :

1) (D_1) $2x + y - 3 = 0$ 2) $(D_2) : x = 3$

3) $(D_2) : y = 2$

Exercice17 : Étudier la position relative des deux droites D) et (D') dans chaque cas suivant :

1) (D) $2x - 4y + 3 = 0$ (D') : $-x + 2y + 5 = 0$

2) (D) $2x + 5y - 2 = 0$ (D') : $x + 3y - 2 = 0$

Exercice18 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D_1): 6x+3y+2=0$ et $(D_2): 3x-2y-1=0$

1)montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes et déterminer le point d'intersection H (x ; y)

2) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

3) étudier la position relative des droites (AB) et (D_1)

4)Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) Qui passe par le point $C(1,2)$ et parallèle a (D_2)

Exercice19: Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D): 3x-5y+6=0$ et $(D'): x-y=0$

1)Donner une représentation paramétrique des droites (D) Et (D')

2) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) Qui passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC) avec $E(3;3)$ et $C(4;0)$

3)déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) et les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D')

4)montrer que J est le milieu de $[IB]$

Exercice20: soient A ; B ; C trois points du plan et E et F deux points tel que :

$\overrightarrow{AF} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

1)Montrer que les points C ; E ; F sont alignés

2)déterminer les coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repére $(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

3) montrer par une autre méthode que les points C ; E ; F sont alignés