Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Prince Moulay Abdellah	**Correction** **Devoir Libre 1**	Niveau : TCS-TCT-Fr Année : 2023-2024

- ✓ **Notion d'arithmétique et l'Ensemble des nombres entiers**
- ✓ **Les vecteurs**
- ✓ **La projection**

Exercice01 : Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 1344 et en déduire le nombre de diviseurs de 1344

Corrigé : Technique (1):

$1344 = 2^6 \times 3^1 \times 7^1$

Le nombre de diviseurs de 1344 est : $(6+1) \times (1+1) \times (1+1)$

$=7 \times 2 \times 2 = 28$

Technique (1)

1344	**2**
672	**2**
336	**2**
168	**2**
84	**2**
42	**2**
21	**3**
7	**7**
1	

Exercice02 : 1) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3
2) Montrer que la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Corrigé : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ donc : $n+(n+1)+(n+2)$ est la somme de trois entiers naturels consécutifs

On a : $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1) = 3k$ avec : $k = n+1 \in \mathbb{N}$

Donc : la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Un nombre impair s'écrit sous la forme :

$2k+1$ Avec $k \in \mathbb{N}$:

On a donc : $(2k+1)+\left[(2k+1)+2\right] = 4k+4 = 4(k+1) = 4k'$ Avec : $k' = k+1 \in \mathbb{N}$

Par suite la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Exercice03 : Soient : $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que : $n-1$ soit un multiple de 3.

Montrer que : n^2-1 est un entier naturel multiple de 3.

Corrigé : On a : $n-1$ soit un multiple de 3

Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n-1 = 3k$

C'est-à-dire : $n = 3k+1$

Donc : $n^2-1 = (3k+1)^2-1 = 9k^2+6k+1-1 = 9k^2+6k$ $n^2-1 = 3(3k^2+2k) = 3k'$ Avec : $k' = 3k^2+2k \in \mathbb{N}$

Par suite : n^2-1 est un entier naturel multiple de 3

Exercice04 : 1) Décomposer les deux nombres 84 et 60 en produit de facteurs premiers.

2) Déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{84}{60}$

3) Simplifier les racines carrées suivant : $A = \sqrt{2100}$ et $B = \sqrt{63} \times \sqrt{105}$

Corrigé :

- On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
- On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

1) Décomposons les deux nombres 84
et 60 en produit de facteurs premiers on trouve:

$84=2^2\times3\times7$ et $60=2^2\times3\times5$

2) En utilisant la décomposition en produit de Facteurs premiers on trouve :

$\frac{84}{60}=\frac{2\times2\times3\times7}{2\times2\times3\times5}=\frac{7}{5}\leftarrow$ La forme irréductible $=\sqrt{2^2\times3\times5^2\times7}$

$=\sqrt{\left(2^2\times5^2\right)\times3\times7}$

$=\sqrt{(2\times5)^2}\times\sqrt{3\times7}=2\times5\times\sqrt{21}=10\sqrt{21}$

On décompose chacun des nombres 63 et 105

On trouve :

$63=3\times21=3\times3\times7=3^2\times7$ et $105=3\times35=3\times5\times7$

D'où $B=\sqrt{63\times105}=\sqrt{3^2\times7\times3\times5\times7}$

$=3\times7\sqrt{3\times5}=21\sqrt{15}$.

Exercice05 : Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$

1) 375^2+648^2 2) $\left(25^3+24^3\right)^7$ 3) $10n+5$ 4) $n^2+11n+17$ 5) $n^2+7n+20$

6) $(n+1)^2+7n^2$ 7) n^2+5n 8) n^2+8n 9) n^3-n 10) $5n^2+n$ 11) $4n^2+4n+1$

Corrigé : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.

Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

1) 375^2+648^2 : 648^2 est paire

Car le carré d'un nombre pair.

375^2 est impair car le carré d'un nombre impair.

375^2+648^2 C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair.

2) 24^3 est paire car le produit de nombres pairs

et 25^3 est impair car le produit de nombres impairs

Donc : 25^3+24^3 c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair

Et par suite : $\left(25^3+24^3\right)^7$ est impair car le produit de nombres impairs.

3) $10n+5=2(5n+2)+1=2\times k+1$

Avec $k=5n+2\in\mathbb{N}$

Par suite : $10n+5$ est un nombre impair.

4) On a : $n^2+11n+17=n^2+n+10n+16+1$

$n^2+11n+17=n(n+1)+2(5n+8)+1$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que :

$n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2+11n+17=2k+2(5n+8)+1$

Donc : $n^2+11n+17=2(k+5n+8)+1=2k'+1$

Avec $k'=k+5n+8$

Par suite : $n^2+11n+17$ est un nombre impair.

5) On a: $n^2+7n+20=n^2+n+6n+20=n(n+1)+2(3n+10)$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

$n^2+7n+20=2k+2(3n+10)=2(k+3n+10)=2k'$ Avec $k'=k+3n+10$

Donc $n^2+7n+20$ est un nombre pair.

6) $(n+1)^2+7n^2=n^2+2n+1+7n^2=8n^2+2n+1$

$=2(4n^2+n)+1=2k+1$

Avec $k=4n^2+n$ et $k\in\mathbb{N}$.

Donc $(n+1)^2+7n^2$ est un nombre impair.

7) Etude de la parité de n^2+5n :

$n^2+5n=n^2+n+4n=n(n+1)+4n$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs

Donc : c'est un nombre pair.

Donc : $n^2+5n=2k+4n=2(k+2n)=2k'$ avec $k'=k+2n\in\mathbb{N}$

Par suite : n^2+5n est un nombre pair.

8) Etude de la parité de n^2+8n :

1ére cas : si n pair.

$n^2=n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $8n=2\times 4n=2\times k$ est pair

On a : n^2+8n c'est la somme de deux nombres pairs donc : n^2+8n est pair.

2ére cas : si n impair.

$n^2=n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $8n=2\times 4n=2\times k$ est pair

On a : n^2+8n c'est la somme d'un nombre impair

Et un nombre pair donc : n^2+8n est impair.

9) Etude de la parité de : n^3-n ; $n\in\mathbb{N}$

$n^3-n=n(n^2-1)=n(n^2-1^2)=n(n-1)(n+1)$.

Donc : $n^3-n=(n-1)\times n\times(n+1)$ est le produit de trois nombres consécutifs ($n\times(n+1)$ est pair)

Donc : n^3-n est un nombre pair.

10) Etude de la parité de $5n^2+n \quad n\in\mathbb{N}$:

$5n^2+n=4n^2+n^2+n=4n^2+n(n+1)=2\times 2n^2+2k$ $5n^2+n=4n^2+n^2+n=2\times(2n^2+k)=2\times k'$

Avec : $k'=6n+8$ et $k''=k+k'$

Car $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : $5n^2+n$ est un nombre pair.

11) Etude de la parité de : $4n^2+4n+1 \quad n\in\mathbb{N}$

$4n^2+4n+1=(2n)^2+2\times 2n\times 1+1^2=(2n+1)^2$

Donc : $4n^2+4n+1$ est un nombre impair car $2n+1$ est un nombre impair et le carré d'un nombre impair est impair

Exercice06 : Soit $n\in\mathbb{N}$

1) Développer : $(n+1)^2-n^2$

2) Déduire que tout nombre impair peut s'écrire par la différence des carrés de deux nombres entiers

Consécutifs. (C'est-à-dire : si *n* impair, il existe deux nombres consécutifs *a*, *b* et $n=b^2-a^2$)

3) Appliquer l'affirmation précédente et écrire les nombres 31 ; 2019 ; 2021 sous forme de deux carrés consécutifs

4) Soit $n\in\mathbb{N}$ montrer que le nombre n^2+n+7 est impair.

5) Appliquer l'affirmation précédente sur le nombre n^2+n+7

Corrigé : 1) On a : $(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$

2) On a $(n+1)^2-n^2=2n+1$ et le nombre $2n+1$ est impair pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $_n$ et $n+1$ sont deux nombres consécutifs.
Donc : tout nombre impair s'écrit comme différence de deux carrés consécutifs.
3) Application : $30=2\times15+1$ est impair et ($2n+1=(n+1)^2-n^2$)
Donc : $30=(15+1)^2-15^2=16^2-15^2$
De même : $2019=2\times1009+1$ est impair
$2019=(1009+1)^2-1009^2=1010^2-1009^2$
De même : $2021=2\times1010+1$ est impair
$2021=(1010+1)^2-1010^2=1011^2-1010^2$
4) On a : $n^2+n+7=n^2+n+6+1=n(n+1)+2\times3+1$
On a : $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :
$n^2+n+7=2k+2\times3+1=2(k+3)+1=2k'+1$ avec : $k'=k+3\in\mathbb{N}$
Donc n^2+n+7 est un nombre impair.
5) On a : $n^2+n+7=2k+2\times3+1$ avec $n(n+1)=2k$ c'est-à-dire : $\frac{n(n+1)}{2}=k$
Donc : $n^2+n+7=2(k+3)+1$ et d'après 2) on a : $n^2+n+7=(k+3+1)^2-(k+3)^2$
Donc : $n^2+n+7=(k+4)^2-(k+3)^2$ avec : $k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice07 : Une société veut fixer des bars pour l'éclairage public sur le périmètre d'une surface rectangulaire de longueur $320\,\text{m}$ et de largeur $240\,\text{m}$
Tel qu'un bar dans chaque coin du rectangle et la distance entre deux bars successifs est constante et un nombre entier
1) Quelle est la plus grande distance qui peut séparer deux bars Successives
2) Quelle est donc le nombre de bars qu'il faut fixer
3) Quelle est les distances supérieures à : $15\,\text{m}$ possible entre deux bars Successives ?
Calculer dans chaque cas possible le nombre de bars qu'il faut fixer

Corrigé : 1) On calcul $PGCD(240;320)$: $320=2^6\times5$ Et $240=2^4\times3\times5$
Donc : $240\wedge320=PGCD(240;320)=80$
Donc la plus grande distance qui peut séparer deux bars Successives est 80
2) Le périmètre est : $(240+320)\times2=1120m$.
Donc : le nombre de bars qu'il faut fixer dans ce cas est : $1120m\div80=14m$
3) Les diviseurs communs de : 240 et 320 sont :1 ;2 ;4 ;5 ;7 ;8 ;10 ;16 ;20 ;30 ;40 ; 80
Les distances supérieures à : $15\,\text{m}$ possible entre
Deux bars Successives sont : 16 ; 20 ; 30 ; 40 ; 80
Pour 16m le nombre de bars qu'il faut fixer est $1120m\div16=70$
Pour 20m le nombre de bars qu'il faut fixer est $1120m\div20=56$
Pour 40m le nombre de bars qu'il faut fixer est $1120m\div40=28$
Pour 80m le nombre de bars qu'il faut fixer est $1120m\div80=14$.

Exercice08 : Soit $n\in\mathbb{N}$
1 Soit $n\in\mathbb{N}$; Montrer que : $(n^2+1-n)(n^2+1+n)=n^4+n^2+1$.
2) Montrer que : 10101 est divisible par 111.
3) Montrer que : 10^8+10^4+1 est divisible par 111.

Corrigé : 1) Soit $n\in\mathbb{N}$

$\left(n^2+1-n\right)\left(n^2+1+n\right)=\left(\left(n^2+1\right)-n\right)\left(\left(n^2+1\right)+n\right)=\left(n^2+1\right)^2-n^2$ $\left(n^2+1-n\right)\left(n^2+1+n\right)=n^4+2n^2+1-n^2=n^4+n^2+1$

Donc : $\left(n^2+1-n\right)\left(n^2+1+n\right)=n^4+n^2+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) On a : $\left(n^2+1-n\right)\left(n^2+1+n\right)=n^4+n^2+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Pour : $n=10$: on a donc : $\left(10^2+1-10\right)\left(10^2+1+10\right)=10^4+10^2+1$

Donc : $10000+100+1=\left(100+1-10\right)\left(100+1+10\right)$

Donc : $10101=91\times111$ c'est-à-dire que : 10101 est divisible par 111

3) On a : $\left(n^2+1-n\right)\left(n^2+1+n\right)=n^4+n^2+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Pour : $n=10^2$

On a donc : $\left(10^4+1-10^2\right)\left(10^4+1+10^2\right)=10^8+10^4+1$

Et puisque : $10^4+1+10^2=10101=91\times111$ est divisible par 111 alors :

$10^8+10^4+1=\left(10^4+1-100\right)\times91\times111=k\times111$ avec : $k=\left(10^4+1-100\right)\times91\in$

Par conséquent : 10^8+10^4+1 est divisible par 111.

Exercice09 : Soit $n\in\mathbb{N}$

Montrer que : $n\left(n^2+5\right)$ est un multiple de 3

Indication : Etudier les cas : $n=3k$; $n=3k+1$ et $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

Corrigé : Soit $n\in\mathbb{N}$ il y'a trois façons d'écrire n : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas : en effet :

1ére cas : si $n=3k$: $n\left(n^2+5\right)=3k\left(\left(3k\right)^2+5\right)=3\left[k\left(9k^2+5\right)\right]=3k'$ Avec : $k'=k\left(9k^2+5\right)\in\mathbb{N}$

Donc : $n\left(n^2+5\right)$ est un multiple de 3

2ére cas : si $n=3k+1$: $n\left(n^2+5\right)=\left(3k+1\right)\left(\left(3k+1\right)^2+5\right)$

Donc : $n\left(n^2+5\right)=\left(3k+1\right)\left(9k^2+6k+6\right)$

Donc : $n\left(n^2+5\right)=3\left(3k+1\right)\left(3k^2+2k+2\right)=3k'$ Avec : $k'=\left(3k+1\right)\left(3k^2+2k+2\right)\in\mathbb{N}$

Donc : $n\left(n^2+5\right)$ est un multiple de 3.

3ére cas : si $n=3k+2$

$n\left(n^2+5\right)=\left(3k+2\right)\left(\left(3k+2\right)^2+5\right)$

C'est-à-dire : $n\left(n^2+5\right)=\left(3k+2\right)\left(9k^2+12k+9\right)$

Donc : $n\left(n^2+5\right)=3\left(3k+2\right)\left(3k^2+4k+3\right)=3k'$ avec : $k'=\left(3k+2\right)\left(3k^2+4k+3\right)\in\mathbb{N}$

Donc : $n\left(n^2+5\right)$ est un multiple de 3

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas le produit $n\left(n^2+5\right)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice10 : 1) Sans calculer les nombres suivants sont-ils premiers ?

$A=49\times13+7$; $B=5\times2\times23+2022$; $C=11\times45+44$

2) a) 19^2 est -il premier ? b) 317 est -il premier ?

Corrigé : 1) $A=49\times13+7$ n'est pas premier car divisible par 7

$B=5\times2\times23+2022$ n'est pas premier car divisible par 2

$C=11\times45+44$ n'est pas premier car divisible par 13

2) a) 19^2 n'est pas premier car divisible par 19

b) les nombres premiers inférieurs a $\sqrt{317}$ sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17

Ils ne divisent pas 317 donc : 317 est premier.

Exercice11 : Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $A = 5^{n+2} - 5^n$; $B = 3^{n+3} + 3^n$

1) Décomposer A en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 6

2) Décomposer B en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 14

3) En déduire $A \wedge B$ et $A \vee B$

Corrigé : 1) $A = 5^{n+2} - 5^n = 5^n \times 5^2 - 5^n = 5^n \times \left(5^2 - 1\right) = 5^n \times 24 = 2^3 \times 3 \times 5^n$

La décomposition de A en produit de facteurs premiers est : $A = 2^3 \times 3 \times 5^n$

$A = 2^3 \times 3 \times 5^n = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5^n = 6 \times \left(2^2 \times 5^n\right) = 6 \times k$

Donc : A est divisible par 6

2) $B = 3^{n+3} + 3^n = 3^n \times 3^3 + 3^n = 3^n \times \left(3^3 + 1\right) = 3^n \times 28 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 3^n = 2^2 \times 3^{n+3} \times 7$

La décomposition de B en produit de facteurs premiers est : $B = 2^2 \times 3^{n+3} \times 7$

$B = 2^2 \times 3^{n+3} \times 7 = 14 \times 2 \times 3^{n+3} = 14 \times k$ Avec $k = 2 \times 3^{n+3}$

Donc : B est divisible par 14

3) Déduction de : $A \wedge B$ et $A \vee B$.

On a trouvé : $A = 2^3 \times 3 \times 5^n$ et $B = 2^2 \times 3^{n+3} \times 7$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de A et B

Donc : $A \wedge B = 2^2 \times 3^1 = 12$ car $1 \prec n+3$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs premiers communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de A et B

Donc : $A \vee B = 2^3 \times 3^{n+3} \times 5^n \times 7 = 56 \times 3^{n+3} \times 5^n = 56 \times 3^3 \times 3^n \times 5^n = 1512 \times 15^n$

Exercice12 : 1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres :
170 ; 68 ; 60 ; 220 ; 340

2) Calculer : *PPCM (68 ; 170); PPCM (220 ; 340)*

Corrigé : 1)*170 = 2 × 5 × 17*

68 = 2 × 2 × 17 = 2² × 17

220 = 2 × 2 × 5 × 11= 2² × 5× 11

340 = 2 × 2 × 5 × 17= 2² × 5× 17

2) On applique la règle suivante pour calculer le PPCM :« Le plus petit multiple commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs et non communs munis du plus grand des exposants trouvés dans leurs décompositions »

Donc : PPCM (68 ; 170) =2² × 5× 17= 340

PPCM (220 ; 340) = 2² × 5× 11× 17= 3740

Exercice13 : D'un aéroport un avion part tous les 9 jours vers un autre pays et du même aéroport un autre avion part tous les 15 jours vers un autre pays

Si les deux avions partent le même jour pour la 1ere fois après combien de jours ils partiront dans les mêmes jours pour la deuxième fois ?

Corrigé : Les départs du premier avion à partir du premier jour sont des multiples de 9 qui sont :
9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ;…

Les départs du deuxième avion à partir du premier jour sont des multiples de 15 :

Qui sont ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ;…

PPCM (9 ; 15) est le nombre de jours après les quels les deux avions partent dans les mêmes jours pour la deuxième fois et puisque :

PPCM (9 ; 15) = 45 donc le nombre de jours est 45.

Autre méthode de calcul du PPCM (9 ; 15) :

On décompose chacun des nombres 9 et 15.

On trouve : 9 = 3 ² et 15 = 3 × 5 et on applique la règle pour calculer le PPCM

Donc : PPCM (9 ; 15) = 3 ² × 5 =9 × 5=45

Exercice14 : 1) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation : $x^2-y^2=51\,(1)$

2) Déterminer tous les couples $(a;b)$ de nombres entiers naturels qui vérifient :

Le système suivant : $\begin{cases} a^2-b^2=7344 \\ a\wedge b=12 \end{cases}(S)$

Corrigé : 1) $x^2-y^2=51$

Équivaut a $(x+y)(x-y)=51$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 51

On a : $51=3^1\times17^1$ donc les diviseurs de 51 sont : 1 et 3 et 17et 51

Par suite : $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=51 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=17 \end{cases}$

Car $x-y\prec x+y$ Donc : $\begin{cases} x=26 \\ y=25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=10 \\ y=7 \end{cases}$

Par suite : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) sont : $(26;25)$; $(10;7)$

2) $\begin{cases} a^2-b^2=7344 \\ a\wedge b=12 \end{cases}$ avec $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$

On a : $a\wedge b=12$ donc : $a=12x$ et $b=12y$

Avec $x\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{N}$ et $x\wedge y=1$

On a aussi : $a^2-b^2=7344$

Équivaut à : $(12x)^2-(12y)^2=7344$

Équivaut à : $144x^2-144y^2=7344$

C'est-à-dire : $144\left(x^2-y^2\right)=7344$

Équivaut à : $x^2-y^2=\dfrac{7344}{144}=51$

Et d'après **1)** on a donc : $(\ x=26\ et\ y=25\ )$ ou $(\ x=10\ et\ y=7\ )$

Par suite :($a=312$ et $b=300$**)** Ou **(** $a=120$ et $b=84$**)**

Par conséquent **:** les couples $(x;y)$ de nombres Entiers naturels qui vérifient le système (S) Sont : $(312;300)$ et $(120;84)$

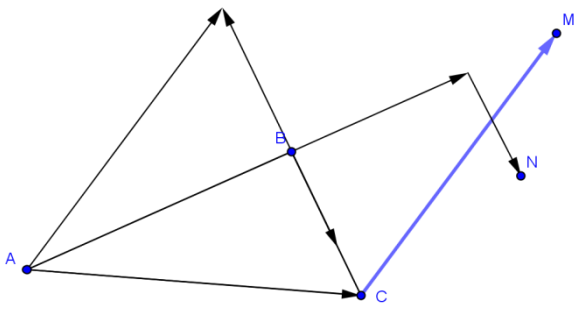
Exercice15 : Soit ABC est un triangle. Et M un point tel que : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$

1) Faire une figure et construire le point M

2) Démontrer que : Les points A, B et M sont alignés.

3) Construire le point N tel que : $\overrightarrow{AN}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

4) Démontrer que : Les droites (BN) et (AC) sont parallèles



Corrigé :

1) Le point M est obtenu par la construction ci-Ci contre

2) Pour montrer l'alignement de trois points ou le parallélisme de deux droites on montre la colinéarité de deux vecteurs bien choisis

Pour montrer que les points A, B et M sont alignés il Suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ Sont colinéaires, c'est-à-dire trouver un réel k tel que ; $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

Or : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{AM}=2\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=2\overrightarrow{AB}$

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Par suite les points A, B et M sont alignés.

3) Le point N est obtenu par la construction ci-dessus.

4) Pour montrer que Les droites (BN) et (AC) sont parallèles il Suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire trouver un réel k tel que ; $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Donc : $\overrightarrow{BN}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$ et par suite : $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Par suite : Les droites (BN) et (AC) sont parallèles.

Exercice16 : Soit ABCD un parallélogramme et E et F sont deux points tels que :

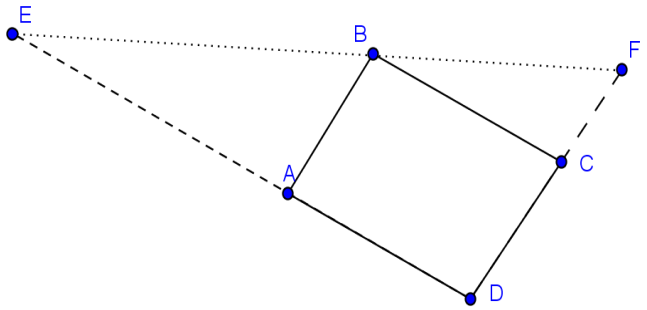
$\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF}=\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

1) Faire une figure et Montrer que : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ et que : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

2) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Vérifier que : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ et en déduire que : Les points E, F et B sont alignés

Corrigé : 1) La figure :



On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}}$

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}}$

2)a) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$ Car : $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ (ABCD un parallélogramme)

Donc : $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$

Par suite : $\boxed{\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}\ (1)$

Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$ donc : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Par suite : $\boxed{\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}\ (2)$

2) b) Vérifions que : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$.

$2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=2(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC})+3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=AB-3AC-AB+3AC=0$

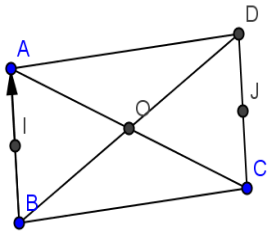
4) Déduisons que : Les points E, F et B sont alignés ?

On a : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ donc : $2\overrightarrow{BE}=-3\overrightarrow{BF}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BF}$

D'où les points E, F et B sont alignés.

Exercice17 : Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I et J sont les milieux respectivement des segments $[AB]$ et $[CD]$



1) Montrer que : $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

2) En déduire que O est le milieu du segment $[IJ]$

Corrigé : 1)

On considère le triangle ABC on a I est le milieu du segment $[AB]$

Et O est le milieu du segment $[AC]$

Donc : d'après une propriété on a : $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

De même : On considère le triangle ACD on a J est le milieu du segment $[AB]$ et O est le milieu du segment $[AC]$

Donc : d'après une propriété on a : $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2) Pour montrer que O est le milieu du segment $[IJ]$ il suffit de montrer que : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$??

$\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et puisque ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

On a donc : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\vec{O}$

Et par suite : O est le milieu du segment $[IJ]$

Exercice18 : Soient ABC un triangle et D un point définie par : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

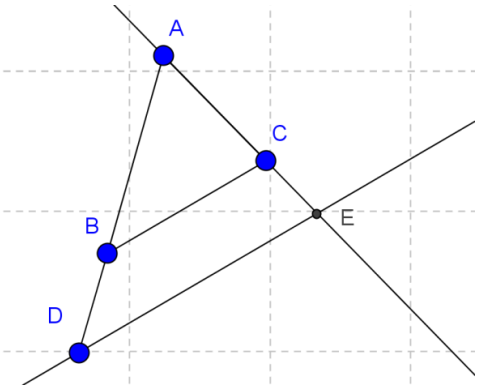
1) Faire une figure

2) La droite parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en E

a) Déterminer DE en fonction BC

b) Montrer que : $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Corrigé : 1)



2)a) on a : A et B et D sont des points alignés et les points A et C et E sont des points alignés dans cet ordre et (DE) (BC)

Nous pouvons appliquer le théorème de Thalès :

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

Or on a : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $AD=\frac{3}{2}AB$: donc : $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{2}$ et par suite : $\frac{DE}{BC}=\frac{3}{2}$ qui signifie que : $\boxed{DE=\frac{3}{2}BC}$

b) On a : $DE=\frac{3}{2}BC$ et les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et ont le même sens

Donc : $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Et on a : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{3}{2}$ donc : $AE=\frac{3}{2}AC$ et puisque $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et ont le même sens alors : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$