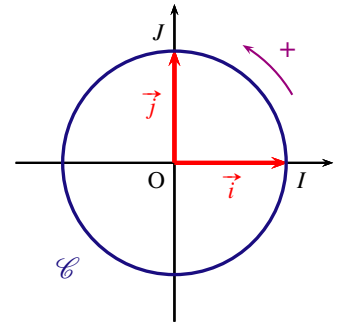


I REPÉRAGE SUR UN CERCLE

1 – CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Le cercle trigonométrique est le cercle \mathcal{C} de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens direct.



2 – ENROULEMENT DE LA DROITE RÉELLE SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

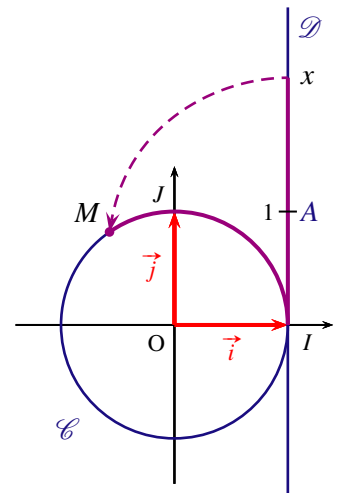
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

La droite \mathcal{D} est tangente en I au cercle trigonométrique \mathcal{C} .

A est le point de coordonnées (1; 1). La droite \mathcal{D} est munie du repère $(I; A)$.

Par enroulement de la droite réelle \mathcal{D} sur le cercle trigonométrique \mathcal{C} :

- à tout point de la droite d'abscisse x on peut associer un unique point M du cercle trigonométrique, image du réel x;
- tout point M du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels. Si le point M est associé à un réel x, alors il est associé à tout réel de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

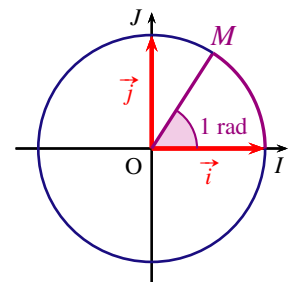


3 – MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

DÉFINITION

Soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O, de rayon 1.

Un radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte le cercle \mathcal{C} suivant un arc de longueur 1.

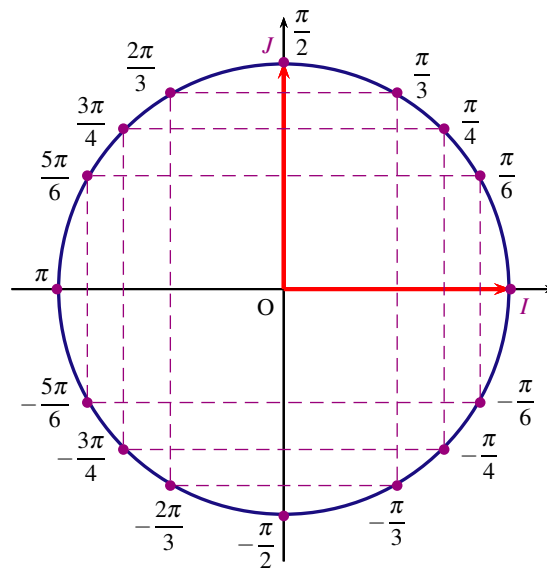


REMARQUE :

Les mesures en radians et en degrés d'un angle géométrique sont proportionnelles :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

VALEURS REMARQUABLES

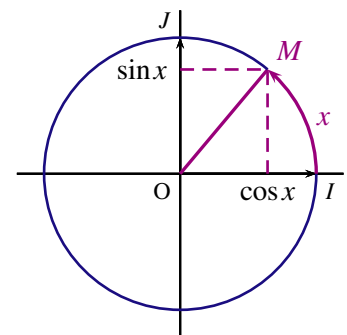


II COSINUS ET SINUS D'UN NOMBRE RÉEL

1 – DÉFINITION

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel x .

- Le cosinus du réel x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M .
- Le sinus du réel x , noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M .



2 – PROPRIÉTÉS

- Pour tout réel x et pour tout entier relatif k , $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
- Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

EXEMPLE :

Sachant que $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ avec $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$.

Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos^2 x + \frac{5}{9} = 1$, soit $\cos^2 x = \frac{4}{9}$.

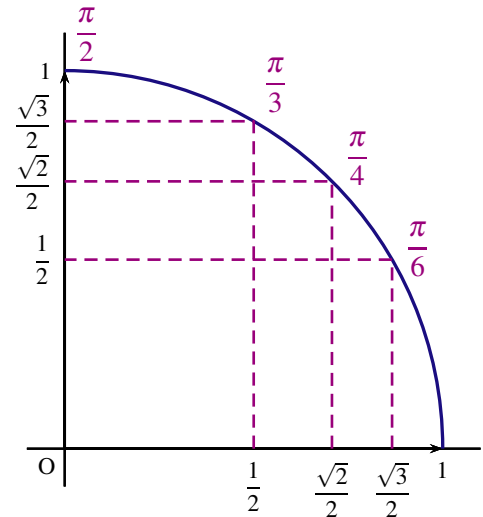
Il existe deux valeurs possibles du cosinus :

$$\cos x = -\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \cos x = \frac{2}{3}$$

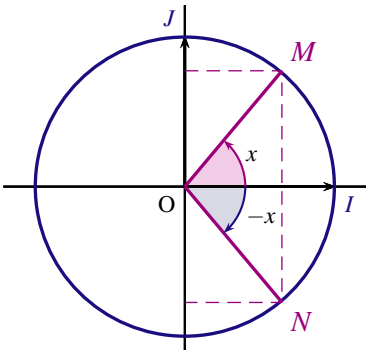
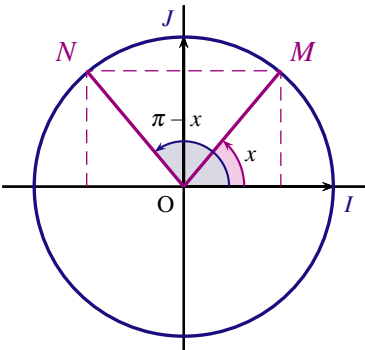
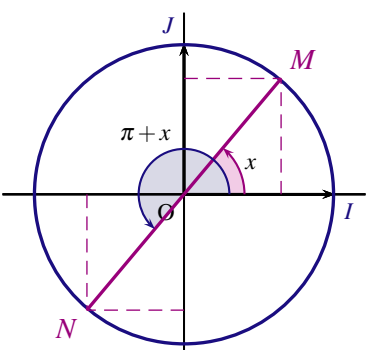
Comme $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, alors $\cos x > 0$ donc $\cos x = \frac{2}{3}$.

3 – VALEURS REMARQUABLES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



4 – ANGLES ASSOCIÉS

<p>Pour tout réel x :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ </div>  <p>M et N sont symétriques par rapport à (OI)</p>	<p>Pour tout réel x :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ </div>  <p>M et N sont symétriques par rapport à (OJ)</p>	<p>Pour tout réel x :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ </div>  <p>M et N sont symétriques par rapport à O</p>
---	---	---

EXEMPLES :

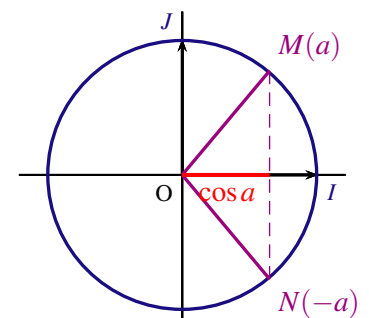
1. $\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
2. $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5 – ÉQUATIONS

— Équation $\cos x = \cos a$

Soit a un réel donné. Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\cos x = \cos a$ sont :

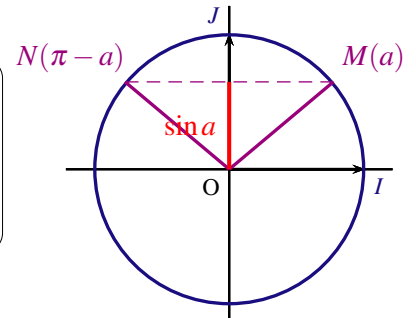
$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$



— Équation $\sin x = \sin a$

Soit a un réel donné. Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\sin x = \sin a$ sont :

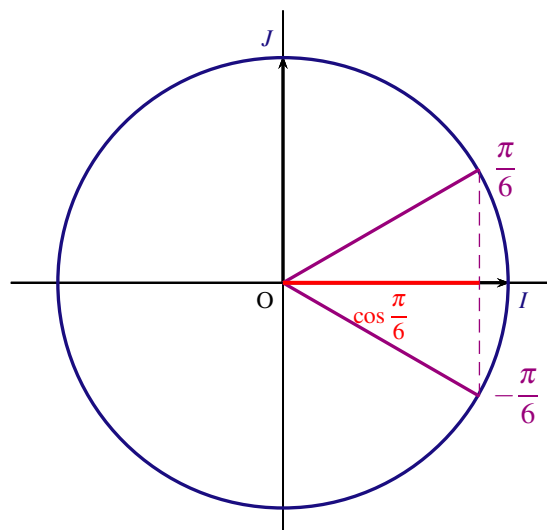
$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$



EXEMPLES :

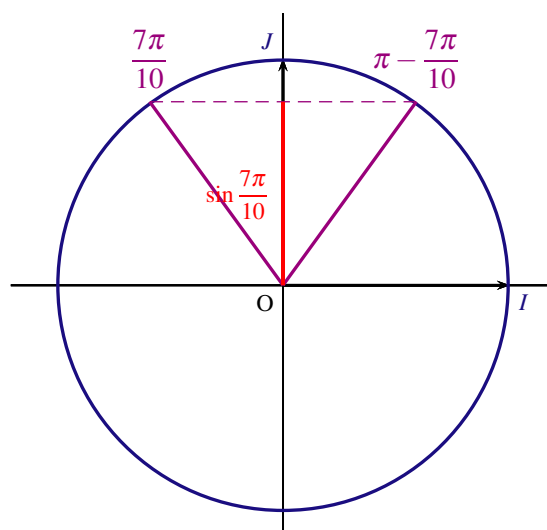
1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Comme $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ l'équation est équivalente à l'équation $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$



Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec k entier relatif.

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin x = \sin \frac{7\pi}{10}$.



Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\sin x = \sin \frac{7\pi}{10}$ sont $x = \frac{7\pi}{10} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{10} + 2k\pi$ avec k entier relatif.