| | | |
|---|---|---|
| **Professeur** : Rachid BELEMOU<br>**Lycée** : **Prince Moulay Abdellah** | **Cours**<br>**PROBABILITÉS** | **Niveau :** Seconde<br>**Année :** **2023-2024** |

## I VOCABULAIRE ET NOTATIONS

### 1 – EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

— Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard.

— L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est l'univers associé à cette expérience aléatoire. On le note $\Omega$.

— Chacun des résultats de cette expérience aléatoire est une éventualité ou un évènement élémentaire.

*Remarques* :

1. Le résultat d'une expérience aléatoire est défini par l'expérimentateur.

   On lance un dé cubique :

   — Si on s'intéresse au chiffre inscrit sur la face supérieure, un évènement élémentaire sera l'un des des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

   — Par contre, si on s'intéresse à la parité du chiffre inscrit sur la face supérieure, un évènement élémentaire sera « pair » ou « impair ». L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{\text{pair},\text{impair}\}$

2. L'univers $\Omega$ n'est pas toujours un ensemble fini .

   On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir « face » un résultat est un mot de longueur finie ou infinie formé avec les deux lettres P pour « pile » et F pour « face ». Par exemple, le résultat PPPF signifie qu'on a lancé quatre fois la pièce, les trois premiers lancers ont donné « pile » et le quatrième « face ».

   $\Omega$ est l'ensemble des mots de la forme $\underbrace{\text{P}\cdots\text{P}}_{k\text{ fois}}\text{F}$, $k \in \mathbb{N}$ et du mot de longueur infinie formé avec la lettre P.

### 2 – ÉVÈNEMENT

Un évènement associé à une expérience aléatoire est une partie de l'univers $\Omega$ constituée de l'ensemble des évènements élémentaires de $\Omega$ pour lesquels on sait si une propriété est vérifiée ou non à l'issue de l'expérience aléatoire.

— L'évènement certain est noté $\Omega$, il est toujours réalisé.

— L'évènement impossible est noté $\varnothing$, il ne se réalise jamais.

EXEMPLE

Dans le cas d'un lancer de dé cubique, les phrases « le résultat est un multiple de 3 », « le résultat est 6 » et « le résultat est 7 » définissent trois évènements.

### 3 – OPÉRATIONS SUR LES ÉVÈNEMENTS

Soit $\Omega$ l'univers associé à une expérience aléatoire, $A$ et $B$ deux évènements

— L'évènement « $A$ ne s'est pas réalisé » est l'évènement contraire de $A$ noté $\overline{A}$.

— L'évènement « au moins un des évènements $A$ ou $B$ s'est réalisé » est l'évènement « $A$ ou $B$ » noté $A \cup B$.

— L'évènement « les évènements $A$ et $B$ se sont réalisés » est l'évènement « $A$ et $B$ » noté $A \cap B$.

— Deux évènements qui ne peuvent pas être réalisés en même temps sont incompatibles.
On a alors $A \cap B = \varnothing$.
Les évènements $A$ et $\overline{A}$ sont incompatibles.

## II PROBABILITÉ

### 1 — LOI DE PROBABILITÉ

$\Omega$ désigne un univers de $n$ éventualités $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
Définir une loi de probabilité $p$ sur $\Omega$, c'est associer, à chaque évènement élémentaire $e_i$ un nombre réel $p(e_i) = p_i$ de l'intervalle $[0;1]$, tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} p(e_i) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

### 2 — PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT

Soit $\Omega$ un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.
La probabilité d'un évènement $A$, est le réel noté $p(A)$ tel que :

— $p(A) \in [0;1]$

— $p(A)$ est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

### 3 — PROPRIÉTÉS

Soit $\Omega$ un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.

1. La probabilité de l'évènement certain est égale à 1. $p(\Omega) = 1$.
2. Si $A$ et $B$ sont deux évènements incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
3. Pour tout évènement $A$, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
4. $p(\varnothing) = 0$.
5. Si $A$ et $B$ sont deux évènements $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

### 4 — ÉQUIPROBABILITÉ

Soit $\Omega$ un univers fini de $n$ éventualités. Si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité c'est à dire, si $p(e_1) = p(e_2) = \cdots = p(e_n) = \frac{1}{n}$, alors l'univers est dit équiprobable.
On a alors pour tout évènement $A$,

$$p(A) = \frac{\text{nombre des issues favorables à } A}{\text{nombre des issues possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

*Notation* :
Soit $E$ un ensemble fini, le cardinal de $E$ noté $\text{card}(E)$ est le nombre d'éléments de l'ensemble $E$.

EXEMPLES

1. *On lance deux dés équilibrés. Quel est l'évènement le plus probable A « la somme des nombres obtenus est égale à 7 » ou B « la somme des nombres obtenus est égale à 8 » ?*

   Si on s'intéresse à la somme des deux dés, l'univers est $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque évènement élémentaire n'a pas la même probabilité.

   $$2 = 1+1 \text{ alors que } 5 = 1+4 \text{ ou } 5 = 2+3$$

On se place dans une situation d'équiprobabilité en représentant une issue à l'aide d'un couple $(a,b)$ où $a$ est le résultat du premier dé et $b$ le résultat du second dé. L'univers $\Omega$ associé à cette expérience est l'ensemble des couples formés avec les éléments de $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Les dés étant équilibrés, il y a $6^2 = 36$ résultats équiprobables.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

L'évènement $A$ est l'ensemble des couples dont la somme des deux termes est égale à 7. D'où $p(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

L'évènement $B$ est l'ensemble des couples dont la somme des deux termes est égale à 8. D'où $p(B) = \dfrac{5}{36}$

L'évènement le plus probable est $A$.

2. *La probabilité de l'évènement B « obtenir au moins un double six en lançant 12 fois deux dés » est-elle supérieure à la probabilité de l'évènement A « obtenir au moins une fois un six en lançant deux fois un dé » ?*

   a) Probabilité de l'évènement $A$

   Lorsqu'on lance deux fois un dé il y a $6^2 = 36$ résultats équiprobables.

   L'évènement $A$ « obtenir au moins un six » est l'évènement contraire de l'évènement « n'obtenir aucun six au cours des deux lancers ».

   Or l'évènement $\overline{A}$ est l'ensemble des couples formés avec les éléments de $\{1,2,3,4,5\}$.

   Le nombre d'éléments de $\overline{A}$ est $5^2 = 25$ d'où $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{5^2}{6^2}$ et

$$p(A) = 1 - p\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{5^2}{6^2} = \frac{11}{36} \approx 0,306$$

   b) Probabilité de l'évènement $B$

   Lorsqu'on lance une fois deux dés, il y a 36 couples de résultats équiprobables. La probabilité de l'évènement « ne pas obtenir de double six » vaut $\dfrac{35}{36}$.

   Lorsqu'on lance 12 fois deux dés, la probabilité de l'évènement $\overline{B}$ « ne pas obtenir de double six » vaut $\left(\dfrac{35}{36}\right)^{12}$ d'où

$$p(B) = 1 - p\left(\overline{B}\right) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{12} \approx 0,287$$

Ainsi, la probabilité de l'évènement $B$ « obtenir au moins un double six en lançant 12 fois deux dés » est inférieure à la probabilité de l'évènement $A$ « obtenir au moins une fois un six en lançant deux fois un dé »