

Équation du 1^{er} degré

On isole l'inconnue dans une équation du 1^{er} degré, en développant ou en multipliant par le dénominateur commun si nécessaire. On obtient alors :

$$ax = b$$

- Si $a \neq 0$, une solution $x = \frac{b}{a}$ d'où $S = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, impossible d'où $S = \emptyset$.
- Si $a = 0$ et $b = 0$, toujours vrai d'où $S = \mathbb{R}$

Factorisation

On peut factoriser de deux façons :

- Par un facteur commun : $ab + ac = a(b + c)$
- Par une identité remarquable :
 - Par une différence de deux carrés :
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
 - par un carré parfait :
$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Inéquation du 1^{er} degré

On isole l'inconnue dans une inéquation du 1^{er} degré. On obtient alors :

$$ax \leq b \text{ ou } ax < b \text{ ou } ax > b \text{ ou } ax \geq b$$

- Si $a \neq 0$, on divise par a
 $a > 0$, on ne change pas l'inégalité
 $a < 0$, $\triangle$ on inverse l'inégalité
 On obtient une section commençante ou finissante.
- Si $a = 0$, on obtient $S = \emptyset$ ou $S = \mathbb{R}$

Équation produit

Lorsque l'équation est de degré supérieur à 1, on annule le second membre.

Si le premier membre peut se factoriser en facteurs du 1^{er} degré, on applique l'intégrité de la multiplication :

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

En cas d'égalité de deux carrés, on applique la règle

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$$

Équations et inéquations du premier degré

Inéquation produit

Lorsque l'inéquation est de degré supérieur à 1, on annule le second membre.

- On factorise le premier membre
- On détermine les valeurs frontières.
- On remplit un tableau de signes puis on résout l'inéquation à l'aide du tableau.

Équation quotient

Si l'inconnue apparaît au dénominateur :

- On détermine l'ensemble de définition D_f .
- En cas d'égalité de deux fractions on effectue un produit en croix.
- Sinon, on multiplie par le dénominateur commun.
- On résout l'équation en vérifiant que la ou les solutions appartiennent à l'ensemble de définition.

Signe du binôme $ax + b$

Lorsque l'on cherche le signe de $ax + b$:

- On détermine la valeur frontière : $x = -\frac{b}{a}$
- On obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a
$a > 0$	-	0	+
$a < 0$	+	0	-

Inéquation quotient

Lorsque l'inconnue apparaît au dénominateur :

- On détermine l'ensemble de définition D_f .
- On annule le second membre.
 $\triangle$ Pas de produit en croix!!
- On réduit au même dénominateur le premier membre en factorisant si nécessaire.
- On détermine les valeurs frontières.
- On remplit un tableau de signes en mettant une double barre pour la ou les valeurs interdites puis on résout l'inéquation à l'aide du tableau.

Exemples de résolution d'équations

• Premier degré

$$\frac{x+2}{3} - \frac{3(x-2)}{4} = \frac{-7x+2}{12} + 2$$

$$(\times 12) \quad 4(x+2) - 9(x-2) = -7x+2+24$$

$$4x+8-9x+18 = -7x+2+24$$

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \text{soit } S = \{0\}$$

• Équation produit

$$(x-1)(2x+3) = (x-1)(x-6)$$

$$(x-1)(2x+3) - (x-1)(x-6) = 0$$

$$(x-1)(2x+3-x+6) = 0$$

$$(x-1)(x+9) = 0 \quad \text{soit } S = \{-9; 1\}$$

• Égalité de deux carrés

$$(5x+2)^2 = (x+1)^2$$

$$5x+2 = x+1 \quad \text{ou} \quad 5x+2 = -x-1 \quad \text{soit } S = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right\}$$

• Équation quotient

$$\frac{x-3}{2x-4} = \frac{x-2}{2x-5} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{2; \frac{5}{2}\right\}$$

$x \in D_f$ produit en croix

$$(x-3)(2x-5) = (x-2)(2x-4)$$

$$2x^2 - 5x - 6x + 15 = 2x^2 - 4x - 4x + 8$$

$$-5x - 6x + 4x + 4x = -15 + 8$$

$$-3x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \in D_f \quad \text{soit } S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$$

$$\frac{-4}{x-4} + \frac{1}{x} = \frac{-3}{x-3} \quad D_f = \mathbb{R}^* - \{3; 4\}$$

$x \in D_f$ on multiplie par $x(x-4)(x-3)$

$$-4x(x-3) + (x-4)(x-3) = -3x(x-4)$$

$$-4x^2 + 12x + x^2 - 3x - 4x + 12 = -3x^2 + 12x$$

$$-4x^2 + x^2 + 3x^2 - 3x - 4x = -12$$

$$-7x = -12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{7} \in D_f \quad \text{soit } S = \left\{\frac{12}{7}\right\}$$

Exemples de résolution d'inéquations

• Premier degré

$$2(x-1) - 3(x+1) > 4(3x+2)$$

$$2x-2-3x-3 > 12x+8$$

$$-13x > 13 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{soit } S =]-\infty; -1[$$

• Inéquation produit

$$(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$$

$$(x-5)(x-2) - (x-5)(2x-3) < 0$$

$$(x-5)(x-2-2x+3) < 0$$

$$(x-5)(-x+1) < 0 \quad S =]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$x-5$	-	-	0	+
$-x+1$	+	0	-	-
$(x-5)(-x+1)$	-	0	+	-

• Inéquation quotient

$$\frac{4}{x+1} \leq 3 \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\frac{4}{x+1} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{x+1} \leq 0 \quad S =]-\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-3x+1$	+	+	0	-
$x+1$	-	0	+	+
$\frac{-3x+1}{x+1}$	-	+	0	-

Équation bicarrée

Une équation bicarrée est une équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

On pose alors $X = x^2$ avec $X \geq 0$

L'équation devient : $aX^2 + bX + c = 0$

On résout en X .

On ne retient que les solutions positives.

On revient à x : $x = \pm\sqrt{X}$

Forme canonique du trinôme

Méthode : Pour déterminer la forme canonique :

- On met a en facteur.
- On considère les deux premiers termes comme le début d'un carré parfait.
- On ajoute puis on retranche le carré introduit.
- On réduit ensuite l'expression.

L'expression générale, **que l'on ne retient pas**, vaut :

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Signe du trinôme

$\Delta > 0$. Le signe du trinôme est du signe de :

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		a	$-a$	a

$\Delta = 0$. Le trinôme est nul si $x = x_0$ et du signe de a sinon.

$\Delta < 0$. Le trinôme est toujours du signe de a

Racines du trinôme

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé discriminant.

- $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$, le trinôme a une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racines

Le second degré

On appelle trinôme du second degré la quantité :

$$ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Fonction trinôme

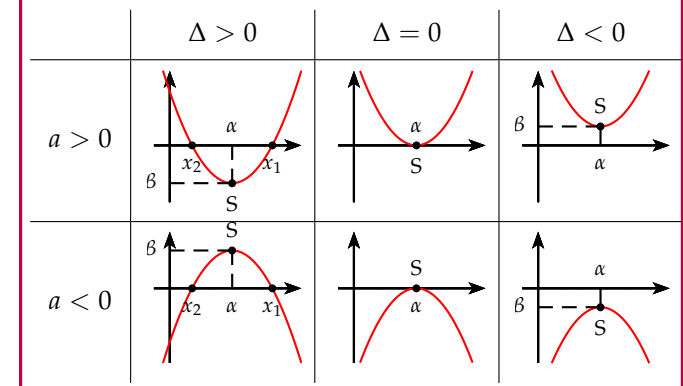
Toute fonction trinôme f peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Selon le signe de a , on a les variations suivantes :

	$a > 0$	$a < 0$
x	$-\infty \quad \alpha \quad +\infty$	$-\infty \quad \alpha \quad +\infty$
$f(x)$	$+\infty \quad \searrow \quad \beta \quad \nearrow \quad +\infty$	$-\infty \quad \nearrow \quad \beta \quad \searrow \quad -\infty$

Représentations



Factorisation. Somme et produit des racines

- $\Delta > 0$: x_1 et x_2 les deux racines.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

- $\Delta = 0$: x_0 la racine double :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Système somme produit

$$\text{Soit le système} \quad \begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

Le système est symétrique donc : si (x, y) est solution alors (y, x) l'est aussi.

x et y sont solutions de l'équation

$$X^2 - SX + P = 0$$

Équation paramétrique

Paramètre : Quantité fixée, souvent noté m , par opposition à une inconnue, noté x , utilisée pour désigner les coefficients devant l'inconnue.

Soit l'équation paramétrique (E_m) : $(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

Déterminer, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation (E_m).

- $m = 1$ L'équation (E_1) est du premier degré : $-2x + 4 = 0$.
(E_1) admet une solution simple $x = 2$
- $m \neq 1$ L'équation (E_m) est du second degré.
 $\Delta = 4m^2 - 4(m-1)(m+3) = 4(-2m+3)$
Le signe de Δ est du signe de $(-2m+3)$.
- On remplit un tableau de signes en indiquant le nombre de solutions.

m	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Δ	+		0	-
Nombre de solutions	2 sol. x_1 et x_2	1 ^{er} deg. 1 sol.	2 sol. x_1 et x_2	x_0 sol. double pas de solution

Inéquation rationnelle se ramenant au second degré

Soit l'inéquation : $\frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + x - 2} \geq 0$

- Racine de $x^2 + x - 2 = 0$
 $x_1 = 1$ racine évidente $P = -2$ donc $x_2 = \frac{P}{x_1} = -2$
L'ensemble de définition est $D_f = \{-2; 1\}$
- Racine de $2x^2 + 5x + 3 = 0$
 $x_1 = -1$ racine évidente $P = \frac{3}{2}$ donc $x_2 = \frac{P}{x_1} = -\frac{3}{2}$
- On remplit un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$	
$2x^2 + 5x + 3$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + x - 2}$	$+$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

- $S =]-\infty; -2[\cup \left[-\frac{3}{2}; -1\right] \cup]1; +\infty[$

Équation se ramenant au second degré

$$x \in D_f \quad \frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-5} = \frac{9}{4} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$$

on multiplie par $4(x+2)(2x-5)$

$$4(2x-5) - 8(x+2) = 9(x+2)(2x-5)$$

$$8x - 20 - 8x - 16 = 18x^2 - 45x + 36x + 90$$

$$-18x^2 + 9x + 54 = 0 \quad \div (-9) \quad 2x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2 \quad \text{deux sol. distinctes}$$

$$x_1 = \frac{1+7}{4} = 2 \in D_f \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2} \in D_f$$

$$S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$$

Équation bicarrée et système somme-produit

- Soit l'équation : $x^4 - 5x - 36 = 0$ On pose $X = x^2$ avec $X \geq 0$.
L'équation devient : $X^2 - 5X - 36 = 0$ on a : $\Delta = 25 + 144 = 169 = 13^2$
Deux sol. $X_1 = \frac{5+13}{2} = 9$ ou $X_2 = \frac{5-13}{2} = -4 < 0$
On ne retient que $X_1 \geq 0$, deux solutions pour x : $x_1 = 3$ ou $x_2 = -3$
- Soit le système $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases}$
 x et y sont solutions de $X^2 - 18X + 65 = 0$. On a $\Delta = 64 = 8^2$
 $X_1 = \frac{18+8}{2} = 13$ ou $X_2 = \frac{18-8}{2} = 5$ donc $S = \{(13, 5); (5, 13)\}$

Professeur : Rachid BELEMOU	Résumé	Niveau : 1 BAC-SEx-F
Lycée : Prince Moulay Abdellah	Le second degré	Année : 2023-2024

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$		$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$								
$a > 0$	Variations	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table>			x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$			
	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$								
	$f(x)$											
	Courbe											
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$									
Signe de $ax^2 + bx + c$	Strictement positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ Négatif sur $[x_1; x_2]$									
$a < 0$	Variations	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table>			x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$			
	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$								
	$f(x)$											
	Courbe											
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$									
Signe de $ax^2 + bx + c$	Strictement négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ Positif sur $[x_1; x_2]$									