

Exercice 1 (7 pts)

- 1) On considère la proposition suivante, $P : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x - 2 \neq 0$.
 - a) Déterminer la négation de la proposition P . 0.5
 - b) En déduire, la valeur de vérité de la proposition P . 0.5
- 2) a) Montrer l'équivalence suivante : 0.75
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.
 b) En déduire, la valeur de vérité de la proposition : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \geq 2\sqrt{xy}$. 0.5
- 3) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (Par l'absurde). 1.5
- 4) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer l'implication suivante : $x \neq \frac{5}{2}y \Rightarrow x + 2y \neq 3(x - y)$. 0.75
- 5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 - 3|x - 1| - 1 = 0$. 1
- 6) a) Soit $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ Montrer par récurrence que : 1.5
 $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.

Exercice 2 (5,75 pts)

- Considérons les deux fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$. Soient (C_f) et (C_g) les courbes respectives de f et g dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 1) a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g , et déterminer le tableau de variations de g . 1.25
 b) Construire la courbe (C_g) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. 0.75
 - 2) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f , et déterminer le tableau de variations de f . 1.25
 b) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. 1
 - 3) Déterminer $D_{g \circ f}$ l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$, et déterminer $g \circ f(x)$ pour tout $x \in D_{g \circ f}$. 1.5

Exercice 3 (7.25 pts)

- Considérons les deux fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ et $g(x) = \frac{x}{x-1}$. Soient (C_f) et (C_g) les courbes respectives de f et g dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f . 0.5
 b) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g . 0.5
 - 2) Construire les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. 2
 - 3) a) Résoudre graphiquement l'équation suivante : $f(x) = g(x)$. 0.75
 b) Résoudre algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$.
 (Indication : 2 est une solution de l'équation : $\frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{4} - 1$). 1
 - 4) a) Résoudre graphiquement l'inéquation suivante : $f(x) \leq g(x)$. 1
 b) Résoudre algébriquement l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.
 (Indication : $x^3 - x^2 - 4 = (x - 2)(x^2 + x + 2)$). 1.5