Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Prince Moulay Abdellah	Cours Racines carrées	Niveau : 3éme_Collège Année : 2023-2024

1 Définition

Définition

Si a est un nombre **positif**, on appelle $\sqrt{a}$ ("racine carrée de a") le nombre positif dont le carré vaut a.

Exemples :

$\sqrt{225} = 15$ car $15^2 = 225$; $\sqrt{0,64} = 0,8$ car $0,8^2 = 0,64$

$\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{3}{4}$ car $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$; $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel $\sqrt{2} \approx 1,41$

Remarques :

On écrira jamais la racine carrée d'un nombre négatif car cela est impossible
En effet si nous écrivons par exemple $\sqrt{-2}$ cela voudrait dire d'après la définition qu'il existe un nombre dont le carré est négatif or un nombre au carré est toujours positif.

On peut supprimer le signe $\times$ devant $\sqrt{\ }$ par exemple : $2\sqrt{3}$ signifie $2 \times \sqrt{3}$

2 Propriétés

Propriété

Si a est un nombre positif alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Exemples :

$\left(\sqrt{123}\right)^2 = 123$; **Si** $x \geqslant 0$: $(\sqrt{x}+3)^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} \times 3 + 3^2 = x + 6\sqrt{x} + 9$

$(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) = (\sqrt{3})^2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$ (**identité remarquable**)

Propriété

Si a est un nombre positif alors $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples :

$\sqrt{3,5^2} = 3,5$; $\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{3}{7}$

Propriété

Si a est un nombre négatif alors $\sqrt{a^2} = -a$ (**Attention, a est négatif donc $-a$ est positif !**)

Exemple :

$\sqrt{(-3)^2} = 3$ car $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, donc comme au dessus, on a bien : $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$

Exercices classiques (plus difficiles)

Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$ (*Autrement dit : développer et réduire en gardant la valeur exacte*).

$A = (2\sqrt{3} + 5)^2$

$A = (\underbrace{2\sqrt{3}}_{a} + \underbrace{5}_{b})^2$ (*c'est la 1ère identité remarquable*)

$A = \underbrace{(2\sqrt{3})^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times 2\sqrt{3} \times 5}_{2\times a\times b} + \underbrace{5^2}_{b^2}$

$A = 2^2(\sqrt{3})^2 + 20\sqrt{3} + 25$

$A = 12 + 20\sqrt{3} + 25$

$A = 37 + 20\sqrt{3}$

$B = (7 + 2\sqrt{5})(7 - 2\sqrt{5})$

$B = (\underbrace{7}_{a} + \underbrace{2\sqrt{5}}_{b})(\underbrace{7}_{a} - \underbrace{2\sqrt{5}}_{b})$ (*c'est la 3ème identité remarquable*)

$B = \underbrace{7^2}_{a^2} - \underbrace{(2\sqrt{5})^2}_{b^2}$

$B = 49 - 2^2(\sqrt{5})^2$

$B = 49 - 4 \times 5$

$B = 49 - 20 = 29$

3 Équations du type $x^2 = a$

Propriété

Si a est négatif alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution réel.

Exemple : Il n'existe pas de nombre réel x qui vérifie l'équation $x^2 = -1$, car quelque soit le signe du nombre x, x^2 est toujours positif.

Propriété

Si a est nul alors l'équation $x^2 = a$ possède une unique solution : 0.

Exemple : 0 est l'unique solution de l'équation $x^2 = 0$.

Propriété

Si a est positif alors l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemples :

- L'équation $x^2 = 16$ possède exactement deux solutions : $\sqrt{16} = 4$ et $-\sqrt{16} = -4$.
- L'équation $3x^2 + 5 = 7$ possède exactement deux solutions car elle est équivalente à l'équation $3x^2 = 7 - 5$ elle même équivalente à l'équation $x^2 = \dfrac{2}{3}$ qui a pour solutions : $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
- L'équation $x^2 = \sqrt{9}$ a pour solutions : $\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$ et $-\sqrt{\sqrt{9}} = -\sqrt{3}$.

4 Opérations et racines carrées

4.1 Racines carrées et produit

Propriété

La racine carrée du produit de deux nombres positifs est égal au produit des racines carrées de ces nombres.
Autrement dit, si a et b sont positifs alors : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Exemples :

$\sqrt{3969} = \sqrt{49 \times 81} = \sqrt{49} \times \sqrt{81} = 7 \times 9 = 63$

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$

4.2 Racines carrées et quotient

Propriété

La racine carrée du quotient de deux nombres positifs est égal au quotient des racines carrées de ces nombres.
Autrement dit, si a et b sont positifs alors : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemples :

$\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$; $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}} = \sqrt{\dfrac{27}{48}} = \sqrt{\dfrac{\cancel{3} \times 9}{\cancel{3} \times 16}} = \sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \dfrac{3}{4}$

Remarque : Attention ! Ces propriétés ne fonctionnent pas avec l'addition et la soustraction !
Contre-exemple : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Deux derniers exemples (plus complexes) :

$A = \sqrt{20}\left(\sqrt{5} + \dfrac{1}{\sqrt{45}}\right)$ **(on distribue)**

$A = \sqrt{20} \times \sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$

$A = \sqrt{20 \times 5} + \sqrt{\dfrac{20}{45}}$

$A = \sqrt{100} + \sqrt{\dfrac{\cancel{5} \times 4}{\cancel{5} \times 9}}$

$A = 10 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{32}{3}$

(double distribution)

$B = (5\sqrt{2} - \sqrt{3})(4\sqrt{2} + \sqrt{3})$

$B = 5\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \ + \ 5\sqrt{2}\sqrt{3} \ - \ \sqrt{3} \times 4\sqrt{2} \ - \ \sqrt{3}\sqrt{3}$

$B = 20 \times (\sqrt{2})^2 \ + \ 5\sqrt{2 \times 3} \ - \ 4\sqrt{3 \times 2} \ - \ (\sqrt{3})^2$

$B = 20 \times 2 + 5\sqrt{6} - 4\sqrt{6} - 3$

$B = 40 - 3 + 5\sqrt{6} - 4\sqrt{6}$

$B = 37 + \sqrt{6}$

Exercices classiques

On demande très souvent dans des énoncés d'exercices d'écrire une racine carrée $\sqrt{a}$ sous la forme $b\sqrt{c}$ où c est le plus petit entier possible. Pour cela il faut écrire a comme un produit dont l'un des facteurs est un le plus grand carré possible. (Rappel, les carrés sont : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 225 ; ...)

Écrire sous la forme $b\sqrt{c}$ où c est le plus petit entier possible.

a) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3}$ (4 est un carré)
$= \sqrt{4} \times \sqrt{3}$
$= 2\sqrt{3}$

b)
$5\sqrt{7} + \sqrt{28} - 4\sqrt{63}$
$5\sqrt{7} + \sqrt{4 \times 7} - 4\sqrt{9 \times 7}$
$5\sqrt{7} + \sqrt{4} \times \sqrt{7} - 4\sqrt{9} \times \sqrt{7}$
$5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 12\sqrt{7} = -5\sqrt{7}$

c) $\sqrt{32}$ deux "possibilités" :
$\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 8}$ ou $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$

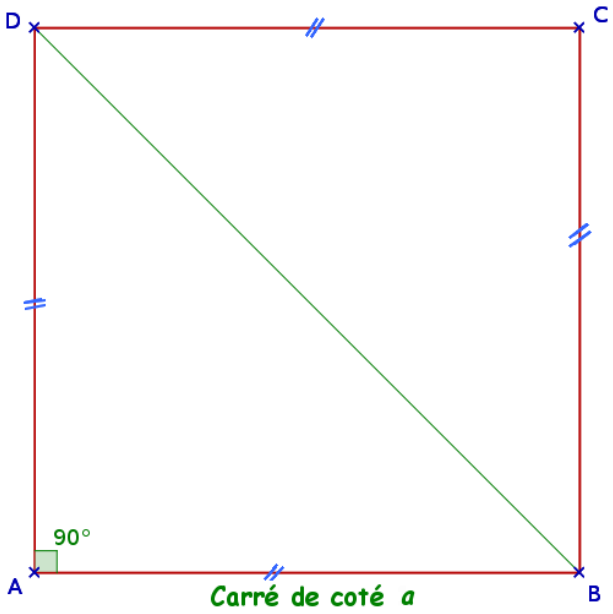
4 et 16 sont tous les deux des carrés mais nous allons choisir l'expression avec le plus grand carré ainsi, le nombre sous la racine carrée sera le plus petit possible.

$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(dans l'autre cas nous aurions eu : $\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 8} = \sqrt{4} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$).

5 Exemples d'utilisations

5.1 Longueur de la diagonale d'un carré de côté a



On montre très facilement que la valeur exacte de la diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$. En effet,

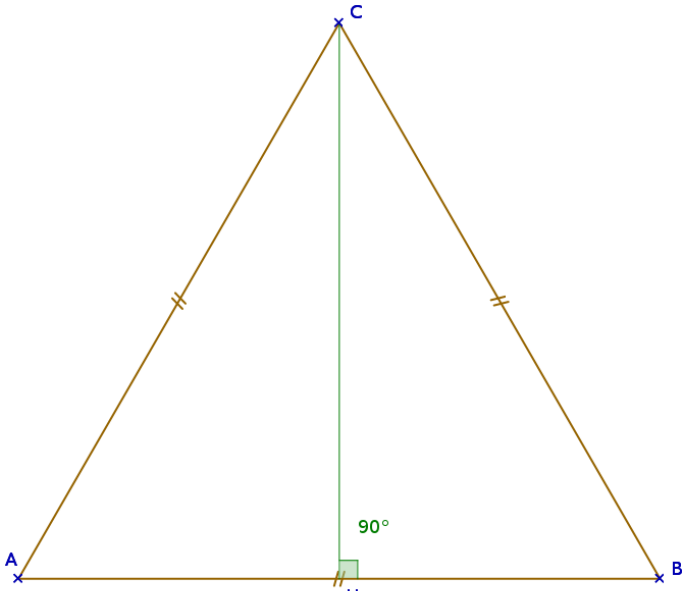
On sait que ABD est un triangle rectangle en A et $AB = AD = a$.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$BD^2 = AB^2 + AD^2$
$BD^2 = a^2 + a^2$
$BD^2 = 2a^2$

Donc $BD = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = \boxed{a\sqrt{2}}$

Par exemple la diagonale d'un carré de côté 1 est $\sqrt{2}$, celle d'un carré de côté 7 vaut $7\sqrt{2}$.

5.2 Longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a



On montre très facilement que la valeur exacte de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. En effet,

On sait que ACH est un triangle rectangle en H et $AC = a$ et $AH = \frac{a}{2}$.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$AC^2 = HA^2 + HC^2$

$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + HC^2$

$HC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

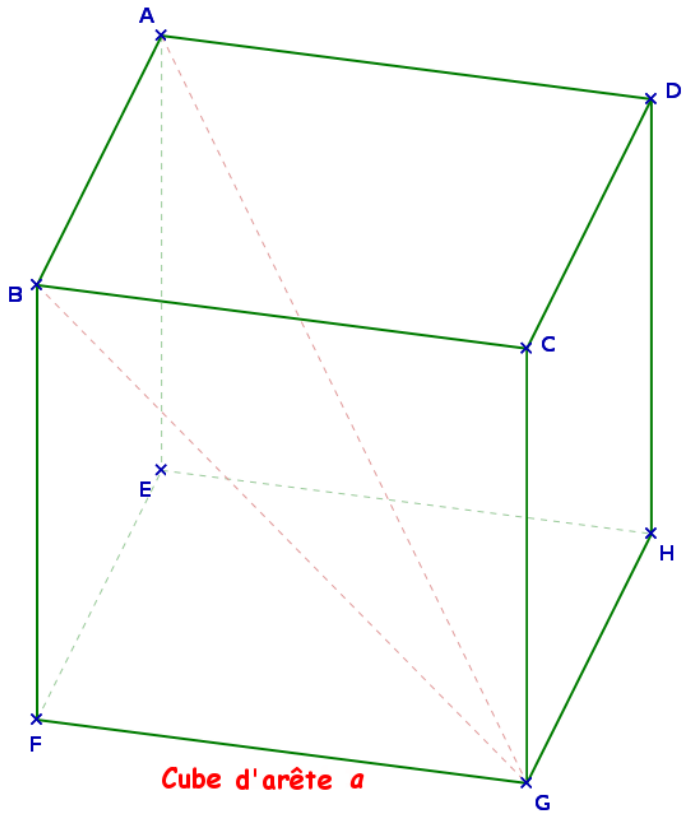
$HC^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$HC^2 = \frac{3a^2}{4}$

Donc $HC = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

Par exemple la diagonale d'un triangle équilatéral de côté 1 est $\frac{\sqrt{3}}{2}$, celle d'un triangle équilatéral de côté 7 vaut $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

5.3 Longueur de la grande diagonale d'un cube d'arête a



On montre en deux étapes que la longueur de la grande diagonale ([AG] sur la figure) d'un cube d'arête a vaut $a\sqrt{3}$.

On sait que BFG est un triangle rectangle isocèle en F avec $FB = FG = a$.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$BG^2 = FB^2 + FG^2$
$BG^2 = a^2 + a^2$
$BG^2 = 2a^2 \qquad (*)$ **(on pourrait continuer le calcul mais cela ne sera pas nécessaire pour la suite)**

De même le triangle ABG (à l'intérieur du cube) est rectangle en B
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$AG^2 = BA^2 + \underbrace{BG^2}$
$AG^2 = a^2 + 2a^2$ **d'après** $(*)$
$AG^2 = 3a^2$

Donc $AG = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \times \sqrt{a^2} = a\sqrt{3}$

Par exemple la grande diagonale d'un cube d'arête 1 vaut $\sqrt{3}$, celle d'un cube d'arête 5 vaut $5\sqrt{3}$.

5.4 Supprimer un radical au dénominateur d'une fraction

Supprimer un radical au dénominateur d'une fraction signifie supprimer une racine carrée du dénominateur de cette fraction sans changer sa valeur. Deux cas sont envisageables, soit nous multiplions numérateur et dénominateur par la même racine carrée, soit nous utilisons la $3^{ème}$ identité remarquable.

1^{er} cas

- $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

- $\dfrac{\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{12} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{12 \times 3}}{2 \times 3} = \dfrac{\sqrt{36}}{6} = 1$

- $\dfrac{1+\sqrt{50}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\left(1+\sqrt{50}\right) \times \sqrt{18}}{\sqrt{18} \times \sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{18 \times 50}}{18}$

$$= \frac{\sqrt{18}+\sqrt{900}}{18} = \frac{\sqrt{18}+30}{18}$$

$2^{ème}$ cas

- $\dfrac{7}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{7}{2+\sqrt{3}} \times \dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{7 \times (2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

nous avons alors au dénominateur la $3^{ème}$ identité remarquable.

$$= \frac{7 \times 2 - 7\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{14 - 7\sqrt{3}}{4-3} = 14 - 7\sqrt{3}$$

- $\dfrac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3} = \dfrac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3} \times \dfrac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}+3} = \dfrac{(\sqrt{10}+3)^2}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}$

nous avons alors au numérateur la $1^{ère}$ identité remarquable et au dénominateur la $3^{ème}$ identité remarquable.

$$= \frac{(\sqrt{10})^2 + 2\sqrt{10} \times 3 + 3^2}{(\sqrt{10})^2 - 3^2} = 19 + 6\sqrt{10}$$